ELEMENTA
MATHEMATICA

Digitized by Google

P. F. FORTUNATI A BRIXIA

Ord. Minor. Refor. Prov. Brixiæ Lect. Theol. Scriptoris Ord. & in Brixiana Academia Publ. Matheſeos & naturalis Philoſ. Profeſſoris

ELEMENTA MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA

TOMUS PRIMUS

Algebræ Synopſim, generalem proportionum doctrinam, ac utriuſque progreſſionis theoriam, & praxim continens.

EDITIO ALTERA.

BRIXIÆ. M. D. CCLVI.
Excudebat JOANNES - MARIA RIZZARDI.
SUPERIORUM PERMISSU.

Digitized by Google

LECTORI BENEVOLO

TYPOGRAPHUS.

SEcunda hæc Mathematicorum Elementorum editio Adm. R. P. F. Fortunato a Brixia in Hiſpaniam properante inchoata ejuſque poſt obitum perfecta, Rm̃o P. F. RAPHAELI A LUGANANO ab ipſomet Auctore fuerat nuncupata. Quæ ergo ille abiens reliquit Epiſtolam Nuncupatoriam, eidem præmittendam duxi, tum ut Auctoris voluntati obſecundarem, tum ut Revm̃o Mœcenati totique ejus Ordini, cui tanta cum laude præfuit, obſervantiam meam teſtarer. Vale.

Digitized by Google

REVERENDISSIMO PATRI

RAPHAELI A LUGAGNANO

S. T. Lectori Emerito, Totius Ordinis S. P. FRANCISCI olim Generali Miniſtro, nec non Ciſmontanæ Familiæ Commiſſario Generali, Romani Cleri Examinatori &c. &c. &c.

F. FORTUNATUS A BRIXIA
F.

TOt, tantaque ſunt, REVERENDISSIME PATER, quæ me Tibi debere ſentio, ut a me graviſſime peccatum arbitrarer, niſi occaſionem quamlibet arriperem, qua poſſem aliquomodo meum erga Te gratum animum publice obteſtari. Quis enim non admiretur, Te, ſummum nempe Virum, ſupremum totius Franciſcani Ordinis olim Moderatorem, maxima apud omnes in æſtimatione poſitum, ſapientiſſimoque Pontifici BENEDICTO XIV charum adeo, ut Roma abeſſe nullo modo pati velit, mecum tamen ea jugiter bene-

Digitized by Google

beaevolentia ac familiaritate agere, ut non modo quantum diligas, quantum rebus meis amanter ſtudeas, crebris argumentis declares, verum etiam ſcriptis perpetuo manu Tua litteris frequenter & amiciſſime me tibi magis magiſque devincire, ac prope dixerim colere, minime dedigneris? At enim, etſi mihi magnum hoc atque honorificentiſſimum jure optimo cenſeam, maxima nihilominus, atque incredibili benignitate illa Tua, ac humanitate multo etiam magis me obſtrictum video, qua nuper criticas *meas* obſervationes, *quibus & pretium addere placuit graviſſimo judicio Tuo, non ſolum excepiſti, ſed me præterea collaudaſti, quod eaſdem adverſus injuſtum, ut modeſte loquar, cenſorem adornaverim. Equidem jamdudum noram, REVERENDISSIME PATER, quo zelo exarderes adverſus hujuſce temporis novarum ad fidem, religionemque pertinentium doctrinarum inventores fautoreſque, quamque ex animo velles, ut quæ Sedis Romanæ auctoritate hactenus in Bajum, Janſenium, & Queſnellum emanarunt Bullæ, ſincere tandem ab omnibus reciperentur, atque obſervarentur. Nunc autem etiam memini, quoties me, in hoc ſtadium vi quodammodo pertractum, extimulares, & adhortatus ſis, ut inceptum jam curſum proſequerer, pergeremque impavide occultas technas, cavillationes, miſera ſub-*

ter-

terſugia detegere, quin certorum hominum fremitus, minitationes, dicteria, ſcommata, ſurcremque revererer. Quod ſane quemadmodum invictæ fortitudinis Tuæ, ſolidæque pietatis documentum eſſe manifeſtiſſimum omnibus oportet, ſic profecto dubitare vel leviſſime neminem poſſe arbitror, idipſum peculiarem in me propenſionem Tuam oſtendere ac declarare, cui me obnoxium, uti dixeram, profiteri totis viribus neceſſe ſit. Quamobrem, cum hac mea Mathematica Elementa, qualiacunque ea ſint, iterum dare prœlo decreverim, nimis officio deeſſe me crederem, niſi eadem, Tui juris facta, Tuo ſub nomine, REVERENDISSIME PATER, prodire curarem, quo uno palam ipſe poſſum & Tua in me merita, & meam in Te obſervantiam, voluntatemque comprobare. Quamvis enim res iſthæc neque dignitate Tua, neque iis beneficiis, quæ liberaliter in me contuliſti, omnino digna fortaſſe ſit, verumtamen, ut ſpero, tantuli muneris tenuitatem ſolita humanitatis Tuæ magnitudine excuſabis. Vale.

Romæ X. Kal. Aguſti anno 1753.

I N-

INDEX LIBRORUM

Qui in hoc primo Tomo continentur.

ALGEBRÆ SIVE ARITHMETICÆ SPECIOSÆ SYNOPSIS.

LIBER I.

De proportione, & proportionalitate Geometrica magnitudinum in genere.

LIBER II.

De progreſſionibus Arithmetica, & Geometrica tam finita, quam infinita.

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

Concedemo Licenza a Giammaria Rizzardi Stampator di Breſcia di poter riſtampare il Libro intitolato: *P. F. Fortunati a Brixia Ord. Min. Reform. &c. Elementa Mathematica in quatuor Tomos digeſta &c.* oſſervando gli ordini ſoliti in materia di Stampe, e preſentando le Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 11. Agoſto 1753.

[*Barbon Moroſini Cav. Proc. Rif.*
[*Alviſe Mocenigo 4. Cav. Proc. Rif.*

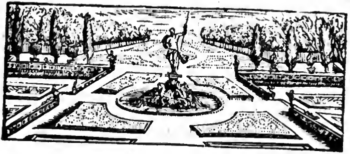
Regiſtrato in Libro a car. 21. al Num. 144.

Alviſe Legrenzi Segr. contro la Beſtemmia.

Gio: Girolamo Zuccato Segret.

PRO-

5.3.235



PROLEGOMENA
IN
ELEMENTA MATHESEOS.

DE ortu & progreſſu Matheſeos pauca hic præmittimus. Plura qui cupit, aut *Hiſtoriam Mathematicam* adeat Petri Rami, aut *Tractatum de Mathematicarum ſcientiarum progreſſu, illuſtrioribuſque Mathematicis* P. De Chales, ejus curſui Mathematico in poſteriori Lugdunenſi editione præfixum, aut demum *Brevem Commentationem* Cl. Volfii, quæ Tomo IV. ſui curſus ad calcem legitur.

I.

Matheſis nomine ea facultas intelligitur, quæ *circa quantitatem* abſtractive *ſumptam tota verſatur*. *Matheſis* Græce dicta eſt, quod *doctrinam, diſciplinam*, ſive *ſcientiam* Latine ſignificat, quatenus nempe tanta eſt orum, quæ in Matheſi traduntur, evidentia, tanta certitudo atque firmitas, ut *ſcientiæ* nomen illi præ ceteris conveniat. Duæ porro ſunt *Matheſeos* partes præcipuæ, *Arithmetica*, & *Geometria*, quemadmodum duæ ſunt ſpecies quantitatis, *diſcreta*, & *continua*.

II.

Arithmetica eſt *ſcientia theoretico-practica de quantitate diſcreta*, ſive *de numeris*. Illius inventio Phœnicibus a pleriſque tribuitur, viro autem ſapientiſſimo Theut Ægyptio, qui Thami Ægyptiorum Regis tempore floruit, a Platone in Phædro, dum ait: *hunc primum omnium numerum, & numeri Com-*

putationem inveniſſe. Verum, cum ex Joſepho (a), numerorum, atque ſiderum ſcientiam Ægyptii ab Abrahamo didicerint, quarum diſciplinarum antea rudes erant, probabilior videtur eorum opinio, qui putant, Aſſyrios atque Chaldæos primos fuiſſe poſt diluvium, qui Mathematicis ſcientiis operam dederint, atque ex illis ad Ægyptios, autore Abrahamo, hujuſmodi facultates delatas eſſe; ob id vero Arithmeticæ inventionem Phœnicibus acceptam referri, quod illi propter mercaturam, cui quammaxime dediti erant, Arithmeticam impenſius coluerint.

I I I.

Geometria eſt *ſcientia theoretico-practica de quantitate continua permanenti finita*, hoc eſt, *de lineis, ſuperficiebus, & ſolidis, prout terminata ſunt, & a materia ſenſibili præſcindunt*. Hæc ab Ægyptiis primo inventa fuiſſe traditur, quatenus, ut ex Herodoto, Strabone, aliiſque habemus, cum Nilus anniverſaria exundatione agrorum fines confunderet, eosque limo operiret, neceſſe illis fuit, ut artem invenirent, qua iterum agri dividerentur, quodque ſuum erat, cuique redderetur. *Geometria* idcirco hæc facultas dicta eſt, a terræ mundum dimenſione, ut fert ipſum nomen, ob quam primo fuerat inventa, quamvis ſi, prout nunc traditur, ſpectetur, ejuſque adæquati objecti ratio habeatur, *Megethometriæ* nomen, ut notat Cl. Sturmius, illi proprie conveniat. Sed cuinam Ægyptiorum primordia Geometriæ ſint adſcribenda, res plane incerta eſt. Plato in Phœdro, ut Arithmeticæ, ita & Geometriæ Theut Ægyptium inventorem facit. Alii vero Mœridi, qui ex Herodoto pyramides altiſſimas excitavit, hoc eximium inventum tribuunt, teſtante Laertio ex Anticlide, Pythagoram *Geometriam perfeciſſe, cum antea Mœris initia elementorum ejus invenerit* (b). At probabilius puto, Geometriæ quoque prima rudimenta Ægyptios a Chaldæis per Abrahamum accepiſſe, quamvis poſtea Ægyptii in Geometria, aliiſque Matheſeos partibus impenſam operam collocaverint, atque in illis adeo floruerint, ut non Geometriæ tantum, verum etiam Arithmeticæ, aliarumque Mathematicarum ſcientiarum primordia ipſis deinceps tribuerentur.

I V.

Ut ut res ipſa ſit, compertum eſt, Mathemata ab Ægyptiis ad Græcos, trajecto mari, delata fuiſſe. Thales Mileſius primus fuit Græcorum, qui Geometriam, quam in Ægypto didicerat, ad Græcos traduxerit; unde dicitur ab Apuleio *Geometriæ penes Grajos primus inventor*. Ei debentur propoſitiones 5, 15 26 Libri I. *elementorum* Euclidis, ſicuti etiam 2, 3, 4, & 5 Libri IV, aliaque plura eximia inventa, quæ a Laertio, & Apuleio memorantur. Floruit autem Thales ſeculo VI. ante Chriſtum, ipſumque ſecutus eſt Pythagoras Samius ſub fine ejuſdem VI. ſeculi, & initio V. ante Chriſtum in Italia celeberrimus. Is autor fuiſſe dicitur quinque corporum regu-

(a) Lib. I. Antiq. cap. 1. (b) Lib. VIII.

Digitized by Google

regularum; quæ *Platonica* vocari ſolent, nec-non magnitudinum *incommenſurabilium*. Invenit propoſitiones 32, 44, 47, & 48. Lib. I. Refert autem Apollodorus apud Laertium, *hecatomben* (bovem). *Pythagoram immolaſſe, cum inveniſſet trianguli rectanguli ſubjectum recto angulo latus tantumdem valere, quantum, quæ illum continerent.* In Arithmetica quoque maxime enituit, tantuſque illius fuit in eam amor, ut *ſecundum numerum* generari omnia autumaverit. Thaletem, atque Pythagoram æmulati ſunt Anaximander Mileſius, qui Geometriam compendio pertractaſſe fertur: Anaxagoras, qui de circuli dimenſione diſſeruit: Oenopides Chius, cui a Proclo propoſitiones 12, & 23 Lib. I., tribuuntur: Zenodorus auctor tractatus de figuris *iſoperimetris*: Hippocrates itidem Chius, qui cubi duplicationem per duas medias proportionales tentavit, omniumque primus, ſi eidem Proclo credimus, Geometriæ elementa ab aliis inventa collegit: Divinus Plato, cujus quantus fuerit in Matheſim ardor, quantoque ſtudio eam coluerit, illa Academiæ foribus inſcripta epigraphe: *Nullus Geometriæ expers accedat*, luculenter oſtendit: Ariſtoteles Stagirita, qui in Matheſi quantum verſatus fuerit, manifeſte evincunt aſſerta illa, quibus referta ubique ſunt ipſius opera: Eudoxus Gnidius, cui totus liber V. ex Græco Scholiaſte debemus: Menechmus Eudoxi auditor, qui *ſectiones conicas* invenit; Hypſicles Alexandrinus, qui autor dicitur lib. XIV., & XV. *elementorum Euclidis*: Serenus Antinſenſis, qui duos compoſuit libros de *ſectione cylindri*, & *coni*. Menelaus, cui libri VI. de *ſubtenſis* in circulo, & libri III. de *triangulis ſphæricis* tribuuntur. Geminus, qui de *ſpiralibus*, *concoidibus*, & *ciſſoidibus* diſſeruit, atque tres tantum eſſe ſimilares lineas oſtendidit: Philo, Diocles, Nicomedes, Sporus, atque Hero ab Eutocio Aſcalonita plurimum commendati: Diophantes Alexandrinus Algebræ, totiuſque numericæ ſubtilitatis autor: Proclus Diadochus, qui ſeculo V. poſt Chriſtum pluribus in Philoſophia, ac Matheſi ſcriptis, commentario præſertim in I. Euclidis librum maxime clarus fuit. Theon Alexandrinus, cujus eximia extant in omnes Euclidis libros commentaria, aliique præterea multi, quos omitto, ut ad eos veniam, qui Mathematicorum Principes merito optimoque jure cenſentur, Euclidem ſcilicet, Archimedem Siracuſanum, Apollonium Pergæum, Theodoſium Tripolitam, & Pappum Alexandrinum.

V.

Euclides *ſuaviſſimi ingenii vir*, & *contentionis minime amans* (a) floruit, ſi Proclo credimus, tempore Ptolomæi Lagi Regis Ægypti, ſub fine nimirum IV. ſeculi ante Chriſtum, atque Alexandriæ omnium primus Geometriam publice docuit. Incertum plane eſt, cujus ille patriæ fuerit. Nonnulli ipſum Megaris natum faciunt, unde Megarenſem vocant, atque cum illo confundunt, qui Socratis auditor fuit, & Megaricam Philoſophorum ſectam inſtituit. Id tamen non videtur verum, tum quia ille integro, vel circiter

(a) Pappus Lib. VII. Collect. Mathem.

ſeculo Euclidem noſtrum præceſſit; tum quia inter Megarenſis opera a Laertio enumerata aureum Elementorum volumen minime recenſetur: quod maximo ſane argumento eſt, Euclidem Geometrarum Principem alium eſſe a Megarenſi, quem Laertius commemorat; cum probabile haudquaquam ſit, Laertium in veterum Philoſophorum monumentis apprime verſatum, hoc tam eximium Euclidis Megarenſis volumen, ſi illius eſſet, ignoraſſe, vel data opera præterire voluiſſe. Ceterum, utcunque res ipſa ſit, de qua viderint alii, Euclides, ut refert Proclus, *elementa collegit, & multa quidem conſtruxit eorum, quæ ab Eudoxo; multa vero perfecit eorum, quæ a Theateto reperta fuerunt. Ea præterea, quæ a prioribus molliore brachio oſtenſa fuerant, ad eas redegit demonſtrationes, quæ nec coargui, nec convinci poſſunt.* Ex quo manifeſtum efficitur, quam falſa ſit illorum opinio, qui putant, non Euclidis, ſed Theonis eſſe elementa Mathematica, quæ vulgo Euclidi tribuuntur, vel Euclidem propoſitiones quidem inveniſſe, ſed eas Theonem demonſtraſſe. Scripſit porro Euclides *Geometriæ elementa*, *Phænomena Aſtronomica*, *Specularia*, *Optica*, *Data Mathematica*, *Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam*, deque *diviſionibus*: quod tamen opus ſuſpicantur nonnulli eſſe libellum illum de *ſuperficierum diviſione* Machometo Bagdedino adſcriptum, & a Joanne Dee Londinenſi, atque Federico Commandino Urbinate publici juris factum. Scripſit quoque Euclides, Proclo teſte, de *conicis* ſectionibus, aliaque id genus opuſcula, quæ temporum injuria periere. Opus tamen omnium præſtantiſſimum, & nunquam ſatis Commendatum, ſunt Geometriæ elementa. De his enim loquens Cardanus, *Euclidis*, inquit, *ſunt duæ præcipuæ laudes, inconcuſſa dogmatum firmitas libri elementorum, perfectioque adeo abſoluta, ut nullum opus huic jure comparare audeas. Quibus fit, ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut ii ſoli in arduis quæſtionibus videantur poſſe verum a falſo diſcernere, qui Euclidem habeant familiarem* (a). Hæc XIII. libris diſpoſuit Euclides, quibus poſtea duo alii, nimirum XIV. & XV., adjecti fuere ab Apollonio Pergæo ex Hypſicle Alexandrino; ac demum XVI. a Franciſco Fluſſate Candalla Nobili Gallo. Horum I. eſt *de triangulis rectilineis*, *lineis parallelis*, *& parallelogrammis*. II. *de rectarum potentiis*, *rectangulis* nempe, *& quadratis*. III. *de affectionibus circuli* IV. *de inſcriptione figurarum planarum regularium in circulo*, *earumque circulo circumſcriptione*. V. *de proportione magnitudinum in genere*. VI. *de ratione*, *& ſimilitudine planorum rectilineorum*, VII. VIII., & IX. *de numeris*. X. *de magnitudinibus incommenſurabilibus*. XI. XII., XIII &c. de *ſolidis*.

V I.

Archimedes Siracuſanus, quem Cicero *Deum terrenum*, *& divino ingenio inſtructum* appellat (b), claruit ſeculo III. ante Chriſtum. Is *uti aliis in ſcientiis*, *& in praxibus Mathematicis*, *ita & in Mechanicis ſummus fuit* (c). Scripſit de *ſphæra*, *& cylyndro*, ſeu de horum corporum dimenſione tam pe-

nes

(a) Lib. XVI. de *ſubtilitate*.
(b) Lib. I. Tuſcul. qq.
(c) Scottus *Magiæ univer.* P. III. lib. I. in proemio.

nes ſuperficiem, quam penes ſoliditatem, de *dimenſione circuli*, *& parabolæ*, *de conoidibus*, *& ſphæroidibus*, de *lineis ſpiralibus*, aliaque plura eximia opuſcula, quæ omnia præclaro in opere (*) nuper edito recenſet pereruditus, ac Nobilis Vir Co. Joannes Maria Mazzuchellus Brixianus. Seculo II. ante Chriſtum floruit Apollonius, ex Perge Pamphiliæ urbe, quam patriam habuit, Pergæus dictus. Auctor is fuit VII. librorum de *ſectionibus* conicis; quam quidem doctrinam cum omnium primus univerſaliſſimam reddiderit, *Magni Geometræ* cognomen, egregiæ laudis encomio, adeptus eſt. Theodoſius Tripolita floruit circa medium ſæculi I. ante Chriſtum. Huic debentur libri III. *ſphæricorum*, ex quibus omnia Geographiæ principia facile demonſtrantur. Pappus demum Alexandrinus, quamvis inter Veteres Mathematicos fere poſtremus, utpote qui claruit poſt Chriſtum natum ſeculo IV., ſi eximiam tamen illius doctrinam ſpectes, primis adnumerandus, *Mathematicas Collectiones* edidit libris VIII. comprehenſas, ex quibus tamen duo priores adhuc deſiderantur. Sex, qui habentur libri, tam *multis abundant*, *tamque variis*, inquit Tacquetus, *ex omni prope Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima, quæ extant, veterum monumenta ab omnibus cenſeantur*. Hæc de Matheſeos origine, atque progreſſu apud veteres, qui eam illuſtrarunt. Silentio enim prætereundos eſſe Recentiores eo duxi conſilio, ne prope infinitam Scriptorum, quibus permultum debet hujuſmodi diſciplina, hiſtoriam prætexerem.

METHODUS MATHEMATICA.

Methodus, quam in ſuis tradendis dogmatis adhibent Mathematici, tribus hiſce regulis tota innititur. I. *ut a generalioribus, ac ſimplicioribus ſumto initio, ad minus generalia, magiſque compoſita progreſſus fiat*. II. *ut nihil in terminis obſcurum, nihil ambiguum relinquatur*. III. *ut omnes propoſitiones, quarum veritas ſola terminorum perceptione evidenter non conſtat, ope definitionum præmiſſarum, axiomatum conceſſorum, ac propoſitionum demonſtratarum oſtendantur*. Hinc ſuas Mathematici diſſertationes ordiuntur a *definitionibus terminorum*, quibus *axiomata*, & *poſtulata*, quæ uſui ſunt ad demonſtrationes conficiendas, ſubiiciunt. His ſuccedunt *lemmata*, tum *theoremata*, & *problemata*, atque horum ſingulis ſua anneccuntur *corollaria*, & *ſcholia*.

DEFINITIONES.

Definitionibus explicantur termini, quorum notio latet. Hæ *nominales* ut plurimum ſunt, hujuſmodi nempe, ut quid tali vocabulo intelligendum ſit, in aperto ponant. Aliquæ etiam modum, quo res ipſa fit, vel fieri poteſt, exponunt; unde *geneticæ* vocantur.

(*) Notizie Iſtoriche, e Critiche intorno alla vita, alle invenzioni, ed agli ſcritti di Archimede Siracuſano. *Brixiæ* 1737.

AXIOMATA.

Axiomata ſunt propoſitiones quædam generales theoreticæ, quarum veritas ſola terminorum perceptione menti occurrit. Hinc *propoſitiones per ſe nota*, & *communes notiones* vocari etiam ſolent, quatenus nempe demonſtratione non indigent, earumque veritas cuique obvia eſt, qui terminos noverit.

POSTULATA.

Poſtulata ſunt propoſitiones quædam practicæ itidem cuique notæ. *Poſtulatum quidem*, inquit Proclus, *tamquam factu facile ſumitur. Axioma vero tamquam cognitu facile communi omnium conſenſu conceditur.*

LEMMA.

Lemma eſt propoſitio, quæ, cum aliis principalioribus demonſtrandis inſerviat, neque commode citari poſſit, propoſitionibus ipſius principalioribus præmittitur, & demonſtratur.

THEOREMA.

Theorema eſt propoſitio theoretica, quæ ex definitionibus, axiomatis, vel propoſitionibus antea demonſtratis oſtenditur.

PROBLEMA.

Problema eſt propoſitio practica, quia nimirum aliquid faciendum proponitur. *Propoſitiones*, inquit P. Chriſtophorus Griembergerus in ſuo Euclide ante prop. I., *vel ſunt theoremata, vel problemata. Illa verſantur circa quantitatem abſtractam ſpeculative, iſta practice; quia habent pro fine aliquod opus intellectuale circa eandem quantitatem abſtractam. Et ita ſumtæ propoſitiones ſunt proprie Mathematicæ, & pure Geometricæ. Ad theoremata revocantur pronunciata, ad problemata poſtulata.*

COROLLARIUM.

Corollarium eſt propoſitio theoretica, vel practica, quæ cum ex alia immediata illatione inferatur, illi veluti conſectarium ſubiicitur.

SCHOLIA.

In *ſcholiis* demum, quæ propoſitionibus ſubiiciuntur, obſcura, & dubia, ſi qua in illis occurrunt, explanantur, doctrinæ uſus indicatur, quæque eruditionem ſapiunt, ſcituque jucunda ſunt, attinguntur.

ALGE-

ALGEBRÆ
SIVE
ARITHMETICÆ SPECIOSÆ
SYNOPSIS.

UT claritati conſulerem, quæ in hac præſertim Matheſeos parte quammaxime optanda eſt, factu optimum duxi, Synopſim in plures Sectiones dividere.

SECTIO PRIMA.

Algebræ natura, atque nonnulla ad eam ſpectantia expenduntur.

DEFINITIO I.

1 *Algebra*, ſive *Arithmetica ſpecioſa*, & *Logiſtica ſimbolica eſt ars, quæ in calculo magnitudinum indeterminatarum tota verſatur*. *Algebra* nomen Arabicum eſt, ab *Al'giabr*, quod *artem reſtituendi*, ſeu *reintegrandi* ſignificat, derivatum. Eſt enim hujuſce facultatis munus præcipuum, ut, poſtquam ignota quantitas ſic fuerit per varias operationes deformata, ut cognitæ quantitati æqualis prodierit, illius valor, facta reintegratione, innoteſcat. Ob id vero *Arithmetica ſpecioſa*, & *Logiſtica ſimbolica* vocatur, quod omnes operationes Logiſticæ, ope literarum Alphabeti, in ea abſolvantur. Triplicem porro ob cauſam Alphabeti literæ cyphris numericis, quæ in vulgari Arithmetica adhibentur, ſubſtitutæ ſunt. *Primo*: quia cyphræ illæ quantitatem diſcretam, eamque certam, determinatam, & cognitam dumtaxat ſignificant. Contra vero literæ Alphabeti magnitudinem generatim ſumtam,

Digitized by Google

prout nempe quantitatem tum diſcretam, tum continuam, motum, tempus, corporum vires, momenta, & reſiſtentias ſub ſe continet; & illam quidem non modo cognitam, & determinatam, verum etiam indeterminatam, & plane incognitam ex æquo deſignant, & exprimunt. *Secundo*: quia in quovis producto literis expreſſo omnia, & ſingula elementa, quibus conſtat, diſtinctè nobis occurrunt, ſecus ac in iis contingat, quæ ex numeralium cyphrarum multiplicatione producuntur. *Poſtremo*: quia Algebricæ demonſtrationes hoc ipſo generales ſunt, hujuſmodi nempe, ut omnes particulares caſus contineant; cum e contrario, quæ notis numericis fiunt, ſingularem dumtaxat caſum complectantur. Franciſcus Vieta omnium primus Alphabeticis literis uſus eſt. Hariottus vero, & ipſum ſecutus Carteſius majoribus literis minores ſubſtituere.

DEFINITIO II.

2. *Magnitudo Algebrica vocatur illa, quæ Alphabeti literis exprimitur*. Hæc autem duplex eſt, *poſitiva*, & *negativa*.

DEFINITIO III.

3. *Magnitudo Algebrica* poſitiva *ea eſt, quæ citra nihilum reperitur, quæque propterea alteri addita, illius valorem auget. Magnitudo vero* negativa *dicitur illa, quæ ultra nihilum poſita eſt, ſique idcirco alteri adiiciatur, illius valorem minuit*. Utraque hæc magnitudo exemplo debiti, & crediti explicari ſolet. Sicuti enim credita ſunt bona poſitiva, quia illis peculium augetur; ita e contrario debita ſunt bona negativa; quia eorum ratione peculium minuitur: & ſicuti valor illius, qui poſſidet decem nummos, nihilque alteri debet, dicitur eſſe *decem nummorum*, ita contraria ratione, qui non ſolum nihil poſſidet, verum etiam aliquid alteri debet, dicitur habere minus adhue, quam nihil, ejuſque valorem ultra nihilum reperiri. Reapſe namque deterioris conditionis eo eſt, qui nihil quidem poſſidet, ſed nihil quoque alteri debet.

COROLLARIUM.

4. Hinc *zero*, ſive *nihil poſitivam* inter, & *negativam* quantitatem medium locum tenet, quatenus nempe *nihilum* quantitatibus additum, illarum valorem non auget, ut præſtat magnitudo *poſitiva*; neque minuit, ut efficit magnitudo *negativa* (a).

HYPOTHESIS I.

5. Magnitudo Algebrica *poſitiva* indicatur ſigno +, *negativa* vero ſigno —, quod

(a) Videatur Volfius *Elem. Analyſeos* §. 18., Nicolaus de Martino Tom. I. *Algebræ* cap. 10. num. 1.

Digitized by Google

quod propterea ſigno + contrarium dicitur. Nimirum *poſitiva* cenſetur magnitudo, quæ ſigno + affecta eſt, ut magnitudines $+a$, $+xy$ &c. At vero *negativa*, quam oppoſitum ſignum — immediate præcedit, ut $-a$, $-mn$ &c.

ANIMADVERSIO.

6. Magnitudo Algebrica nulla nota affecta pro *poſitiva* habenda eſt. Videlicet perinde eſt omnino, ſive $+a$, ſive a ſcribatur.

DEFINITIO IV.

7. *Magnitudo Algebrica* ſimplex, *ſive* incomplexa, *item* monomia, *vocatur illa, quæ una, vel pluribus etiam literis nullo interjecto ſigno copulatis, exprimitur*. Hujuſmodi ſunt magnitudines a, bd, mrx &c.

DEFINITIO V.

8. *Magnitudo vero complexa ea eſt, quæ pluribus terminis conſtat, interjecta nota +, vel — ſimul unitis*. Tales ſunt magnitudines $a+b$, $d-c$, $mp+nd-xy$, & aliæ hujuſmodi. Porro ſi duo tantum ſint termini, ſeu partes magnitudinis complexæ, magnitudo dicitur *binomia*, ut $a+b$, $de-mp$ &c. Si tres, dicitur *trinomia*, ut $a+b-c$. Univerſaliter *polynomia* vocatur, ſi plures partes contineat.

DEFINITIO VI.

9. *Magnitudines ſimplices, ſicuti etiam termini magnitudinum complexarum dicuntur* ſimiles, *qui eaſdem omnino Alphabeti literas complectuntur, quamvis non eundem ordinem inter ſe habeant*. Similes nempe ſunt magnitudines incomplexæ abc, bac, cab &c., quemadmodum etiam termini ab, ba, nec non dfx, fxd magnitudinum complexarum $ab+dfx-mp$; $pr+ba-fxd+xy$,

HYPOTHESIS II.

10. Magnitudines incognitæ tribus poſtremis Alphabetis literis deſignari ſolent; reliquis vero magnitudines cognitæ.

HYPOTHESIS III.

11. Præter ſigna +, —, hæc etiam alia =, >, <, ∞ in Algebra adhibentur. Signum = dicitur ſignum *æqualitatis*, quatenus deſignat, eas magnitudines eſſe inter ſe æquales, inter quas repetitur. Sic $a=b$ idem omnino eſt, ac magnitudines a, b eſſe inter ſe æquales. Signum > eſt ſignum *majoritatis*, indicat nempe, magnitudinem, quæ ſignum > immediate precedit, majorem eſſe illa,

illa, quæ ſignum ipſum proxime conſequitur. Contra vero ſignum $<$ eſt ſignum *minoritatis*, quatenus deſignat, magnitudinem, quæ ante illud poſita eſt, ab ea deficere, quæ poſt ipſum reperitur. Videlicet $a > b$ idem eſt, ac magnitudinem a majorem eſſe magnitudine b; e contrario vero $a < b$ idem ac terminum a minorem eſſe termino b. Poſtremo ſignum ∞ vocatur ſignum *infinitatis*, quatenus ſcribendo $a = \infty$ indicatur, magnitudinem a eſſe infinitam. Signis $=$, $>$, $<$ primus omnium uſus eſt Hariottus. Nonulli cum Carteſio loco ſigni $=$ adhibent ſignum $\propto$.

SECTIO SECUNDA.

De additione magnitudinum Algebricarum.

DEFINITIO I.

12. *Additio eſt duarum, vel plurium magnitudinum in unum collectio*, nempe *inventio magnitudinis, quæ eas omnes, quarum ſumma quæritur, ſimul ſumtas adæquet*. Hujuſmodi eſt in vulgari Arithmetica operatio illa, qua ex numero 4, & numero 8. efficitur 12.

DEFINITIO II.

13. *Magnitudo, quæ ex pluribus ſimul additis conſurgit, additionis ſumma vocatur*. Hujuſmodi eſt numerus 12., qui fit ex numeris 4, 8. ſimul collectis.

PROBLEMA I.

Magnitudines incomplexas ſimul addere.

Reſolutio.

14. Magnitudines algebricæ incomplexæ, quarum una alteri adiicienda eſt, jungantur ſimul, mediante ſigno $+$ illis omnibus interjecto. Aggregatum hinc emergens erit ſumma quæſita.

Exemplum.

Ut ſi colligere ſimul in unam ſummam oporteat magnitudines a, b, de, ſcribendum eſt $a+b+de$.

Demonſtratio.

Etenim unam magnitudinem alteri addere, eſt unam plus altera ſumere (§ 12.) Si-

Digitized by Google

Signum autem + ſignificat *plus* (§.5.). Ergo $a+b$ idem erit ac ſumma ex a, & b.

ANIMADVERSIO I.

15. Si termini algebrici, quos ſimul jungere oportet, ſibi mutuo ſimiles fuerint, omneſque poſitivi, vel negativi, eorum unus dumtaxat, ceteris neglectis, in calculo ſcribendus eſt, præfixa illi nota numerica, quæ exprimat, quoties terminus ille in calculo ſumi debeat. Ut ſi jungendæ ſimul ſint tres magnitudines a, a, a, vel ad, ad, ad, loci aggregati $a+a+a$, vel $ad+ad+ad$, ſcribendum eſt $3a$, vel $3ad$. Cum enim quælibet quantitas pro unitate ſumi poſſit, ſicuti cyphra numerica 3. tres unitates deſignat, ita terminus Algebricus $3a$ tres magnitudines indicat magnitudini a æquales.

SCHOLION.

16. Notæ numericæ, quæ terminos Algebricos præcedunt, eoſque in eadem linea immediate afficiunt, numeri *coefficientes* dicuntur. Igitur *coefficiens magnitudinis Algebricæ eſt numerus illi magnitudini in eadem linea ad ſiniſtram præfixus, indicans quoties magnitudo ipſa in calculo ſumenda ſit.*

ANIMADVERSIO II.

17. Pro *coefficiente* magnitudinis algebricæ nulla nota numerica ad ſiniſtram affectæ, unitas ſemper intelligitur, ita nimirum ut dm idem ſit ac $1dm$, ab idem ac $1ab$ &c.

ANIMADVERSIO III.

18. Si termini literales ſimiles, quarum ſumma quæritur, *coefficientibus* numeris effecti ſint, ipſi numeri ſimul colligi debent, eorumque ſumma uni eorum, ceteris deletis, præfigenda eſt. Ut ſi magnitudo $3ad$ addenda ſit magnitudini $4ad$, ſcribendum eſt $7ad$, non autem $4ad+3ad$.

PROBLEMA II.

Magnitudines complexas ſimul addere.

Reſolutio.

19. Jungantur ſimul mediante nota poſitiva +, perinde omnino ac ſi eſſent magnitudines incomplexæ.

Exem.

Exemplum.

Ut ſi magnitudo $d+e-n$ addenda ſit magnitudini $a-d+b$, ſcribendum eſt $a-d+b+d+e-n$.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum demonſtratione problematis præcedentis.

ANIMADVERSIO I.

20. Termini ſimiles, & æquales contrariis ſignis affecti debent in ipſa ſumma omnino deleri. Ut ſi facta fuerit ſumma $ab+2de+mn-2de$ ex magnitudine $mn-2de$ addita magnitudini $ab+2de$, delendi in ea ſunt termini $+2de$, $-2de$. Hi namque utpote æquales, & contrarii, omnino ſeſe perimunt. Erit ergo ſumma $ab+mn$.

ANIMADVERSIO II.

21. Si termini ſimiles contrariis ſignis affecti, inæquales *coefficientes* habeant, minor *coefficiens* majori ſubtrahi debet, ejuſque reſiduo ſignum illud præfigendum eſt, quo major *coefficiens* affectus erat. Ut ſi in data ſumma habeantur termini $+7ab$, $-4ab$, ſublato *coefficiente* 4. a *coefficiente* 7., cum major terminus $7ab$ affectus ſit ſigno $+$, ſcribendum eſt $+3ab$, loco nimirum aggregati $+7ab-4ab$. Si vero e contrario habeantur termini $-7ab+4ab$, ſcribendum eſt $-3ab$. Conſtat enim, contrarios terminos, quatenus æquales, ſeſe perimere.

Monitum.

22. In omnibus calculis Algebricis id ante omnia præſtandum eſt, ut termini ſimiles ad ſuas ſimpliciores expreſſiones reducantur, deleantur nempe, qui contrarii ſunt, & æquales; ſimul vero colligantur in unum, qui ſunt ſibi mutuo ſimiles, & minime opponuntur.

SECTIO TERTIA.

De ſubtractione magnitudinum Algebricarum.

DEFINITIO I.

23. *Subtractio eſt unius magnitudinis ex altera ſubductio*, ſeu *inventio magnitudinis, quæ, ſi magnitudini ſubductæ adiiciatur, totum conſtituit,* *illi*

illi æquale, cui ſit ipſa ſubtractio. Hujuſmodi eſt illa operatio in Arithmetica communi, qua detracto numero 4. ex numero 7., relinquitur 3. Si namque numerus reſiduus 3. numero 4., qui ſubtrahitur, adiiciatur, numerus ipſe 7. efficitur.

DEFINITIO II.

14. *Magnitudo, quæ, facta ſubtractione, relinquitur, differentia & reſiduum vocari ſolet.* Talis eſt in exemplo ſuperius poſito numerus 3.

COROLLARIUM.

15. Hinc *ſubtractio* per *additionem*, & viciſſim *additio* per *ſubtractionem* oſtenditur. Optime nimirum facta eſt *ſubtractio*, ſi differentia ſimul cum eo, quod ſubtractum eſt, totum illud conſtituat, cui facta fuit ſubductio. Viciſſim legitime *additio* peracta eſt, ſi altera magnitudinum, quæ ſimul collectæ fuerant, ex tota ſumma ſublata, quod ſupereſt, earundem alteram adæquet.

PROBLEMA I.

Magnitudinem incomplexam alteri incomplexæ ſubtrahere.

Reſolutio.

16. Magnitudines, quarum una alteri ſubducenda eſt, ſimul jungantur mediante ſigno negativo —, ea quidem lege, ut magnitudo, cui altera ſubtrahi debet, ſignum — immediate præcedat: ea vero, quæ debet ſubtrahi, ſignum ipſum immediate conſequatur.

Exemplum.

Ut ſi magnitudinem b magnitudini a ſubtrahere oporteat, ſcribendum eſt $a - b$. Complexa enim magnitudo $a - b$ duarum a, b differentiam deſignat.

Demonſtratio.

Unam magnitudinem alteri ſubtrahere eſt unam minus altera ſumere (§. 13.). Cum igitur ſignum — ſignificet *minus* (§. 5.), $a - b$ perinde erit ac magnitudo a minus magnitudine b, nempe differentia, quæ remanet, facta ſubductione termini b a termino a.

ANI:

ANIMADVERSIO I.

27. Si magnitudines incomplexæ, quarum una alteri ſubducenda eſt, ſimiles fuerint inter ſe, & omnino æquales, per ſubtractionem evaneſcunt, ac proinde deleri debent. Cum enim ſint inter ſe æquales, nihil, facta ſubtractione, relinquitur.

ANIMADVERSIO II.

28. Si magnitudines fuerint quidem ſimiles, ſed inæqualibus *coefficientibus* affectæ, obſervandum eſt, an minor magnitudo a majori, num vero major a minori auferri debeat. Etenim ſi primum: facta ſubductione minoris *coefficientis* a majori, reſiduus numerus eidem termino præfigendus eſt cum nota poſitiva $+$. Ut ſi magnitudini $7ab$ ſubtrahere oporteat magnitudinem $4ab$, differentia erit $+3ab$. Sin alterum: reſiduus numerus eidem termino præfigendus eſt cum nota negativa $-$. Ut ſi magnitudo $7ab$ ſubducenda ſit magnitudini $4ab$, differentia erit $-3ab$. Ratio eſt evidens. Quandoquidem ſi ab eo, qui poſſidet ſeptem nummos, quatuor auferantur, tres illi adhuc remanent; ac proinde illius valor adhuc eſt citra nihilum. Si vero ab eo, qui quatuor tantum habet nummos, ſeptem nummi auferendi ſint propter debitum, ſublatis quatuor, quos poſſidet, debitor manet trium nummorum, quo fit propterea, ut illius valor ſit minor nihilo.

PROBLEMA II.

Magnitudinem complexam alteri complexæ ſubtrahere.

Reſolutio.

29. Jungantur magnitudines ipſæ mediante ſigno negativo $-$, perinde ac ſi eſſent ſimplices. Signa vero poſitiva magnitudinis ſubtrahendæ mutentur in negativa, & viciſſim negativa in poſitiva. Quatuor idcirco caſus diſtinguendi ſunt. Vel enim auferri debet magnitudo poſitiva a poſitiva; vel poſitiva a negativa; vel negativa a poſitiva; vel negativa a negativa.

Caſus I.

30. Si magnitudo poſitiva $c+d$ ſubtrahenda ſit magnitudini itidem poſitivæ $a+b$, reſiduum erit $a+b-c-d$.

Demonſtratio.

Cum enim tota ſumma $c+d$ removenda ſit a magnitudine $a+b$, ſingulæ partes ipſius $c+d$ ſubtrahi debent magnitudini $a+b$. Quamobrem mutandum

dum eſt ſignum + in —, adeoque ſcribendum $a + b - c - d$. Hoc enim enim ipſo tam pars c, quam pars d ipſi $a + b$ ſubtrahitur.

Caſus II.

31. In ſubtractione magnitudinis poſitivæ $c + d$ a negativa $a - b$, ſcribendum eſt pro reſiduo $a + b - c - d$.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti.

Caſus III.

32. Si magnitudo negativa $c - d$ ſubduci debeat magnitudini poſitivæ $a + b$, reſiduum hoc modo exprimendum eſt $a + b - c + d$.

Demonſtratio.

Enimvero cum $c - d$ exprimat differentiam magnitudini c ſupra magnitudinem d (§. 26.), hæc tantum ſubtrahi debet magnitudini $a - b$. Si autem ſcriberetur pro reſiduo $a + b - c - d$, magnitudini $a + b$ ſubducta eſſet tota magnitudo c, ſecus ac fieri debeat; ſubtrahi enim debet exceſſus dumtaxat ipſius c ſupra d. Ne igitur plus juſto auferatur, facta ſubductione termini c, adiiciendus eſt reſiduo $a + b - c$ terminus d; atque adeo ſcribendum $a + b - c + d$.

Caſus IV.

33. Si magnitudo negativa $c - d$ ſubtrahenda ſit magnitudini itidem negativæ $a - b$, reſiduum erit $a - b - c + d$.

Demonſtratio.

Patet ex præcedenti. Etenim perinde omnino eſt, ſive magnitudini poſitivæ $a + b$, ſive negativæ $a - b$ magnitudo negativa $c - d$ ſubducatur.

A N I M A D V E R S I O.

34. Si in magnitudinibus complexis, quarum una alteri ſubtrahi debet, occurrant termini ſimiles, æqualibus, vel inæqualibus *coefficientibus* numeris affecti, ea in illorum ſubductione obſerventur, quæ ſuperiori loco §. 27., & 28. animadvertenda notavimus.

SECTIO QUARTA.

De multiplicatione magnitudinum Algebricarum.

DEFINITIO I.

35. *Multiplicatio unius magnitudinis per aliam eſt inventio magnitudinis; quæ toties contineat magnitudinem multiplicatam, quoties magnitudo multiplicans continet unitatem*, vel *quæ ſit hujuſmodi pars, vel partes magnitudinis multiplicatæ, cujuſmodi pars, vel partes unitatis eſt magnitudo multiplicans*. Talis eſt in vulgari Arithmetica operatio illa, qua ex numero 4. multiplicato per numerum 5. fit numerus 20., & ex numero fracto $\frac{2}{3}$ multiplicato per fractum $\frac{3}{4}$ numerus $\frac{6}{12}$ efficitur. Conſtat enim, numerum 20. toties continere numerum 4. multiplicatum, quoties numerus 5. multiplicans unitatem comprehendit. Similiter quæ partes unitatis eſt fractio $\frac{3}{4}$, eaſdem partes fractionis $\frac{2}{3}$ eſſe fractionem $\frac{6}{12}$, quæ ex multiplicatione fractionis $\frac{2}{3}$ per fractionem $\frac{3}{4}$ producitur. Fractio namque $\frac{6}{12}$ ter continet fractionem $\frac{2}{12}$, quæ eſt quarta pars fractionis $\frac{8}{12}$, cui fractio $\frac{2}{3}$ eſt æqualis.

DEFINITIO II.

36. *Magnitudo, quæ naſcitur ex multiplicatione unius magnitudinis per aliam, factum, ſeu productum nuncupatur*. Sic numerus 20. dicitur *factum*, ſive *productum* ex ductu numeri 4 in numerum 5.

COROLLARIUM.

37. *Productum, quod fit ex multiplicatione cujuſvis magnitudinis per unitatem, diverſum aliquid non eſt ab ipſa magnitudine multiplicata*. Ut ſi magnitudo a multiplicetur per unitatem, productum erit ipſamet magnitudo a. Quandoquidem ſicuti unitas non niſi ſemel ſeipſam continet, ita factum ex hac mltiplicatione non niſi ſemel debet magnitudinem a continere. Igitur hujuſmodi productum erit magnitudini a æquale, quemadmodum unitas ſeipſam adæquat.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA I.

Magnitudinem incomplexam per alteram incomplexam multiplicare.

Reſolutio.

38. Magnitudines incomplexæ, quarum una in alteram ducenda eſt, copulentur ſibi mutuo, nullo plane ſigno interjecto. Aggregatum hujuſmodi erit factum quæſitum.

Exemplum.

Ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem a per magnitudinem b, & magnitudinem dx per magnitudinem fg, ſcribendum eſt ab, $dxfg$. Eſt enim ab factum a in b, & $dxfg$ factum ex ductu dx in fg.

HYPOTHESIS.

39. Multiplicatio unius magnitudinis per aliam indicatur ſigno $\times$, magnitudines nempe, quarum una in aliam ducenda eſt, eo interjecto copulando. Sic $a \times b$ deſignat, magnitudinem a multiplicandam eſſe per magnitudinem b, atque adeo productum ab, quod ex hac multiplicatione efficitur.

ANIMADVERSIO I.

40. Perinde omnino eſt, quocunque ordine literæ in producto Algebrico ſibi mutuo apponantur. Ut, ſi multiplicare oporteat magnitudines a, b inter ſe mutuo, perinde eſt omnino, ſive a per b, ſive b per a multiplicetur, atque adeo ſive ab, ſive ba pro facto habeatur. Eſto namque $a = 5$., $b = 2$. Multiplicando 5. per 2., ſive a per b, *bis* quinarius, ac proinde *decies* unitas ſumitur. Multiplicando vero 2. per 5., ſive b per a, *quinquies* ſumitur binarius, & ideo *decies* unitas. Ergo idem emergit productum, ſive 5. per 2., ſive 2. per 5. mutiplicetur; eritque propterea $ab = ba$, & eadem ratione $abc = bac = cba$ &c.

ANIMADVERSIO II.

41. Quoties eadem litera pluries, quam bis, in eodem producto occurrit, ſemel tantum in illo ſcribenda eſt. Tum vero paulo altius poſt ipſam character arithmeticus illi appingi debet, qui exprimat, quoties ipſa litera in tali producto contineatur. Sic loco producti aaa ſcribitur a^3, loco producti $bbbb$ ſcribitur b^4 &c.

SCHOLION I.

42. Character Arithmeticus paulo altius poſt literam poſitus *exponens* nuncupatur, quatenus nempe *deſignat factum ex ipſa litera tot vicibus una minus in ſeipſam ducta, quot unitates ipſe numerat*. Sic *exponens* 2. magnitudinis a^2 exprimit productum ex magnitudine a ſemel ducta in ſeipſam; *exponens* 3. magnitudinis b^3 deſignat productum, quod duplici multiplicatione efficitur, nimirum ex b per ſeipſam, & ex bb iterum per b, atque ita de ceteris.

SCHOLION II.

43. *Exponens* literæ, quæ ſemel tantum ſcribenda eſt, ab unitate non diſtinguitur. Et licet unitas tunc literæ non appingatur, attamen veluti illi appicta ſupponitur, ita nimirum ut a idem ſit ac a^1, & b idem b_1 &c.

ANIMADVERSIO III.

44. Si uterque multiplicationis terminus *coefficiente* numero affectus ſit, facta literalium terminorum multiplicatione, ipſi quoque numeri inter ſe mutuo multiplicari debent, & numerus hinc emergens illi producto præfigi, utpote illius *coefficiens*. Sic productum ex multiplicatione termini $4ab$ per terminum $3de$ erit $12abde$. Ratio ex infra dicendis patebit.

ANIMADVERSIO IV.

45. Si vero alter dumtaxat terminorum, qui inter ſe mutuo multiplicandi ſunt, *coefficiente* numero ſit affectus, multiplicatis terminis, producto hinc facto idem *coefficiens* præfigi debet. Ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem $3a$ per bd, productum erit $3abd$. Hujus quoque ratio ex dicendis perſpecta habebitur.

ANIMADVERSIO V.

46. Numeri *exponentes* terminorum ſimilium, qui eadem litera expreſſi ſunt, debent in ipſorum terminorum multiplicatione ſimul colligi, & ſumma eidem literæ appingi. Ut ſi multiplicanda ſit magnitudo a^2 per magnitudinem a^3, productum erit a^5. Eſt enim a_2 idem ac aa, & a^3 idem ac aaa, ſicuti etiam a^5 idem ac $aaaaa$ (§. 41.). Ergo erit $a^2 \times a_3 = a^5$.

ANIMADVERSIO VI.

47. Si autem magnitudines multiplicandæ eadem litera expreſſæ non fuerint, facta literarum unione, unicuique ſuus *exponens* appingendus eſt, perinde ac ſi nulla facta fuiſſet multiplicatio. Sic productum ex d^2 in b^3 erit

a^2b^3

$a^2 b^3$: Conſtat enim, ex multiplicatione termini *aa* per terminum *bbb* oriri productum *aabbb*, adeoque $a^2 b^3$ (§. 38.).

S C H O L I O N.

48. Si idem fuerit *exponens* literarum diſſimilium, quæ inter ſe mutuo multiplicandæ ſunt, ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem a^1 per magnitudinem b^1, loco producti $a^1 b^1$ ſcribi ſolet $\overline{ab}^1$.

P R O B L E M A II.

Magnitudinem complexam per alteram complexam multiplicare.

Reſolutio.

49. Singuli termini unius ducantur in ſingulos terminos alterius, quæque inde fiunt producta partialia, ope ſignorum, quæ illis debentur juxta regulas infra tradendas, ſimul colligantur. Hujuſmodi namque aggregatum erit productum totale quæſitum.

Exemplum.

Multiplicare oporteat *trinomium* $a + b + c$ per *binomium* $d + e$. Primo itaque multiplicentur ſinguli termini magnitudinis $a + b + c$ per terminum d; deinde omnes iidem termini per terminum e. Ex prima multiplicatione oritur productum $ad + bd + cd$; ex ſecunda vero productum $ae + be + ce$, quæ ſimul collecta dant productum $ad + bd + cd + ae + be + ce$. Hoc ergo erit productum totale ex multiplicatione *trinomii* $a + b + c$ per *binomium* $d + e$.

Demonſtratio.

Unum totum non poteſt per alterum totum multiplicari, niſi ſingulæ partes unius in ſingulas partes alterius ducantur; totque proinde in producto totali habeantur partialia producta, quot unitates numerat factum ex numero partium, quæ ſunt in uno, multiplicato per numerum partium, quæ in altero reperiuntur. Non enim totum a ſuis partibus ſimul unitis diſtinguitur. Ergo &c.

S C H O L I O N.

50. Hinc patet, cur *coefficientes* terminorum multiplicari inter ſe mutuo debeant, ut diximus ſupra §. 44., & factum numericum producto Algebrico adjungi, nimirum productum, quod naſcitur ex termino $4ab$ multiplicato per $3de$, eſſe $12abde$. Enimvero cum $4ab$ idem ſit ac $ab + ab + ab + ab$, &

B 2 3de

$3de$ idem ac $de + de + de$ (§. 51.); productum autem ex multiplicatione *quadrinomii* $ab + ab + ab + ab$ per *trinomium* $de + de + de$ *duodecies* contineat productum partiale $abde$, perſpicuum remanet, productum ex $4ab$ per $3de$ neceſſario eſſe $12abde$.

ANIMADVERSIO I.

51. Si termini magnitudinum complexarum, quarum una in alteram ducenda eſt, *coefficientibus*, aut *exponentibus* numeris ſint affecti, ea in illorum multiplicatione obſerventur, quæ §. 44. & ſequentibus tradidimus. Ut ſi multiplicare oporteat *binomium* $3ab + d^3$ per *binomium* $4ab + d^2$, cum ſit $3ab \times 4ab = 12\ ab$ (§. 44.), $d^3 \times 4ab = 4abd^3$ (§. 45.), $3ab \times d^2 = 3abd^2$ (§. 45.), $d^3 \times d^2 = d^5$ (§. 46.), productum totale erit $12ab + 4abd^3 + 3abd^2 + d^5$.

ANIMADVERSIO II.

52. In multiplicatione magnitudinum complexarum conſideranda ſunt ſigna, quibus ſinguli ipſarum termini ſunt affecti. Hinc enim dependet determinatio ſigni, quo ſingula producta partialia affici debeant, ſimulque propterea in producto totali conjungi. Sequentes itaque leges ſunt obſervandæ.

I.

Plus per plus reddit plus.

53. Videlicet ſi omnes termini magnitudinum complexarum, quarum una in alteram ducenda eſt, ſigno poſitivo + ſint affecti, ſingula quoque partialia producta eodem ſigno affici debent. Ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem $a + b$ per magnitudinem $c + d$, productum totale erit $ac + ad + bc + bd$.

Demonſtratio.

Factum ex multiplicatione toties continet, vel continetur in termino multiplicato, quoties terminus multiplicans continet, vel continetur in unitate (§. 35.). Quod autem aliquoties continet magnitudinem poſitivam, vel in illa continetur, eſt magnitudo itidem poſitiva. Ergo factum ex multiplicatione magnitudinis poſitivæ per poſitivam neceſſario eſt magnitudo poſitiva.

II.

Plus per minus reddit minus.

54. Factum ſcilicet ex ductu termini affecti ſignó poſitivo + in terminum affectum ſigno negativo —, afficiendum quoque eſt ſigno negativo —. Sic productum ex multiplicatione magnitudinis $a + d$ per magnitudinem $b - c$ erit $ab + bd - ac - dc$.

De-

Demonſtratio.

Cum enim $b - c$ reſiduum exprimat, quod remanet, detracta magnitudine c ex magnitudine b (§. 24.), magnitudo $a + d$ multiplicanda non eſt per totam b, ſed per illud reſiduum dumtaxat. Productum igitur $ab + db$ eſt majus juſto, tota nimirum ea quantitate, quæ efficitur multiplicando utrumque terminum magnitudinis $a + d$ per partem negatam c. Quamobrem a producto $ab + db$ removenda ſunt producta ac, dc, atque adeo ſcribendum $ab + da - ac - dc$.

III.

Minus per plus reddit minus.

55. Si nempe terminus affectus ſigno negativo $-$ multiplicetur per terminum, qui ſigno poſitivo $+$ donetur, ut $a - b$ per $c + d$, productum ſigno negativo $-$ affici debet, videlicet hujuſmodi productum erit $ac + ad - cb - db$.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Perinde enim eſt ſive $a - b$ per $c + d$, ſive $c + d$ per $a - b$ multiplicetur.

IV.

Minus per minus reddit plus.

56. Videlicet factum ex multiplicatione magnitudinis negativæ per negativam erit magnitudo poſitiva. Ut ſi multiplicanda ſit magnitudo $a - b$ per magnitudinem $c - d$, productum erit $ac - cb - da + bd$.

Demonſtratio.

Enimvero, cum multiplicanda non ſit tota magnitudo a per totam magnitudinem c, ſed tantum pars unius per partem alterius, nempe reſiduum per reſiduum, productum ac majus erit juſto. Illi ergo ſubtrahendum eſt productum cb factum ex ductu totius c in partem negatam b, nec non productum da, quod emergit ex parte negata d multiplicata per totam a. Verum ſubtrahendo productum cb, plus juſto ſubtrahitur. Quandoquidem, ſi ponatur $c - d = x$, ac proinde $x + d = c$ (§. 23.), erit $x + d \times b = c \times b$, ſive $bx + bd = cb$; adeoque ſubtrahendo productum cb producto ac, ſubtrahitur ipſi *binomium* $bx + bd$. Conſtat autem, ſubtrahendum dumtaxat eſſe productum bx; cum hujuſmodi productum debeat eſſe factum non ex toto termino c multiplicato per b; ſed ex termino c imminuto magnitudine d

Digitized by Google

per ipſum b multiplicato. Ergò ne plus juſto auferatur, ſublatis productis cb, da, addendum eſt productum bd; ac proinde ſcribendum $ac - cb - da + bd$.

Corollarium.

57. Igitur perſpicuum remanet, eadem ſigna in multiplicatione efficere $+$; diverſa vero reddere $-$.

Scholion.

58. Licet exempla ſuperius poſita exhibeant multiplicationem *binomii* per *binomium*, propterea quod, ut notat Cl. Volfius, magnitudo negativa per negativam proprie loquendo, multiplicari nequeat, ſed tantum prout *privative poſitivis junguntur* (a); attamen ſinguli termini complexæ magnitudinis conſiderari poſſunt ſine ulla ratione ad alios, quibus copulati ſunt, videlicet perinde omnino ac ſi eſſent magnitudines incomplexæ. Si ergo termini, quorum alter per alterum multiplicari debet, iiſdem ſignis affecti ſint, productum afficiendum eſt ſigno poſitivo $+$; contra vero ſigno negativo $-$, ſi illorum alter ſignum $+$, alter ſignum $-$ ſibi præfixum habeat, erit nempe $+a \times +b = +ab$, $-a \times -b = +ab$, $+a \times -b = -ab$, $-a \times +b = -ab$.

Problema III.

Polynomium per monomium multiplicare.

Reſolutio.

59. Ducatur *monomium* in ſingulos terminos *polynomii*, quæque inde fiunt producta, debitis ſignis ſimul copulentur.

Exemplum.

Multiplicare oporteat magnitudinem $a+b+c$ per magnitudinem d. Singuli termini magnitudinis $a+b+c$ multiplicentur, per magnitudinem d. Productum totale erit $ad+bd+cd$.

Demonſtratio.

Non enim tota magnitudo $a+b+c$ multiplicatur per magnitudinem d, niſi ſingulæ illius partes in ipſam d ducantur.

Animadversio.

60. Si *monomium*, per quod magnitudo *polynomia* multiplicanda eſt, nullo

(a) Elem. *Analyſeos* §. 31.

lo ſigno ſit affectum, producta partialia iiſdem ſignis affici debent, quibus *reſpective* affecti ſunt termini multiplicati. Ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem $a + b - c$ per magnitudinem d, productum erit $ad + bd - cd$. Eſt enim d idem ac $+ d$ (§. 6.). Eſt autem $+ b \times + d = + bd$ (§. 53.)., & $- c \times + d = - cd$ (§. 55.). Ergo erit quoque $\overline{a + b - c} \times d = ad + bd - cd$. Si autem magnitudo multiplicans præfixum habeat ſignum $-$, producta partialia illis ſignis afficiantur, quæ juxta leges ſuperius traditas (§. 53. & ſeq.) ipſis ſingulis conveniunt.

SCHOLION.

61. Hinc oſtenditur, quod ſuperiori loco traditum eſt de *coefficiente* producti ex multiplicatione magnitudinum ſimplicium, quarum altera nullo *coefficiente* ſit affecta, videlicet hujuſmodi producto *coefficientem* illum præfigi debere, quo illarum altera donatur (§. 45.), ut ſi multiplicare oporteat magnitudinem $3a$ per bd, ſcribendum eſſe $3abd$. Eſt enim $3a$ idem ac $a + a + a$ (§. 15.). Ergo erit $3a \times bd = \overline{a + a + a} \times bd = abd + abd + abd = 3abd$.

Monitum.

62. Utile tamen plerumque eſt, multiplicationem complexarum magnitudinum nequaquam inſtituere, ſed ope ſigni $\times$ eam tantummodo indicare. Ut ſi magnitudo $a + b - c$ multiplicanda ſit per magnitudinem $d - e$ loco producti $ad + db - dc - ea - eb + ec$, quod inde efficitur, ſufficit ſcribere $\overline{a + b - c} \times \overline{d - e}$.

SECTIO QUINTA.

De diviſione magnitudinum algebricarum.

DEFINITIO I.

63. *Diviſio unius magnitudinis per aliam eſt inventio magnitudinis, quæ toties contineat unitatem, vel quoad aliquam, aut aliquas ſui partes in unitate toties contineatur, quoties magnitudo dividenda continet diviſorem, vel in diviſore quoad aliquam, vel aliquas ſui partes comprehenditur.* Sic dividere 12. per 4. idem eſt ac invenire numerum, qui *ter* contineat unitatem, quemadmodum numerus diviſus 12. *ter* comprehendit diviſorem 4. Similiter dividere 4 per 12. eſt invenire numerum, quæ ſit *tertia pars* unitatis, ſicuti diviſus 4. eſt *tertia pars* diviſoris 12.

DEFINITIO II.

64. Quantitas per diviſionem inventa dicitur *quotus*, ſive *quotiens* diviſionis. Quamobrem *quotus diviſionis eſt quantitas, quæ eodem modo continet unitatem, vel in unitate continetur, quo terminus diviſus continet diviſorem, vel in ipſo diviſore comprehenditur*. Nimirum numerus 3. eſt *quotus* numeri 6. diviſi per 2., & fractio $\frac{1}{4}$ eſt quotus numeri ejuſdem 3. diviſi per 12. Quandoquidem ſicuti 6. *ter* continet diviſorem 2., & numerus 3. eſt *quartas pars* diviſoris 12., ita quotus 3. *ter* comprehendit unitatem, & fractio $\frac{1}{4}$ *unam quartam* unitatis partem deſignat.

COROLLARIUM I.

65. *In omni diviſione ſi diviſor per quotientem multiplicetur, productum efficitur termino diviſo æquale*. Ut, ſi *quotus* magnitudinis a diviſæ per magnitudinem b ſit quantitas x, erit $b \times x$, ſive productum bx æquale termino a diviſo. Productum namque bx toties continet terminum b multiplicatum, quoties terminus x multiplicans continet unitatem, vel productum bx eſt hujuſmodi pars, vel partes termini b, cujuſmodi pars, aut partes unitatis eſt quantitas x (§. 35.). Terminus autem a diviſus per b toties continet diviſorem b, quoties quotus x continet unitatem, vel terminus a eſt hujuſmodi pars, vel partes diviſoris b, cujuſmodi pars, aut partes unitatis eſt quotus x (§. 64.). Ergo productum bx eodem penitus modo continet diviſorem b, vel in illo continetur, quo terminus a diviſus eundem b itidem continet, vel in illo comprehenditur. Evidenter autem ex terminis conſtat, magnitudines illas eſſe æquales inter ſe, quæ toties ex æquo eandem quantitatem continent, vel in eadem continentur. Ergo factum bx æquale erit termino a; ac proinde &c.

COROLLARIUM II.

66. Hinc *diviſio optime peracta eſt, ſi diviſore per quotientem multiplicato, productum fiat termino diviſo æquale*. Ut ſi *quotus* magnitudinis a diviſæ per magnitudinem b fuerit x, optima erit diviſio, ſi factum bx fuerit æquale magnitudini a diviſæ.

COROLLARIUM III.

67. Quemadmodum per multiplicationem bonitas diviſionis oſtenditur, ita per diviſionem legitimane facta ſit multiplicatio demonſtratur. *Optime* nimirum *peracta erit multiplicatio, ſi diviſo producto per unam magnitudinum, ex quarum multiplicatione productum ipſum efficitur, altera earundem pro quotien-*

tiente erumpat. Sic factum ex a in b eſt ab, ſi diviſo autem per b, *quotus* ſit a.

COROLLARIUM IV.

68. *Quotus unius magnitudinis per alteram ſibi aqualem diviſæ eſt unitas.* Ut ſi dividatur magnitudo a per ſeipſam, quotus erit 1. Eodem namque modo unitas ſeipſam, ſicuti magnitudo diviſa tunc diviſorem comprehendit.

COROLLARIUM V.

69. *Quotus magnitudinis per unitatem diviſæ diverſum aliquid non eſt ab ipſa diviſa magnitudine.* Ut ſi magnitudo a per unitatem dividatur, quotus erit ipſa eadem magnitudo a diviſa.

PROBLEMA II.

Magnitudinem incomplexam per alteram complexam dividere.

Reſolutio.

70. Ducta lineola, diviſor infra dividendum ſcribatur. Fractio hinc emergens erit *quotus* diviſionis quæſitus.

Exemplum.

Ut ſi dividere oporteat magnitudinem a per magnitudinem b, ſcribendum eſt $\frac{a}{b}$.

Demonſtratio.

Enimvero quemadmodum in Arithmetica vulgari fractio $\frac{18}{6}$ exprimit diviſionem numeri 18. per numerum 6., atque ipſius diviſionis *quotientem* 3 adæquat, ita in Algebra fractio $\frac{a}{b}$ diviſionem deſignat magnitudinis a per magnitudinem b, ipſaque fractio pro diviſionis *quotiente* jure poteſt aſſumi.

SCHOLION.

71. Loco fractionis diviſionem indicantis, magnitudo aliqua ſimplex, vel complexa pro diviſionis *quotiente* plerumque aſſumitur; & tunc dicitur una magnitudo alteri in calculo ſubſtitui. Ut ſi loco fractionis $\frac{a}{d}$, qua indicatur diviſio termini a per d, aſſumatur quantitas m ſimplex, vel com-

ple-

Digitized by Google

plexa $p+r$, aut alia hujuſmodi; quantitas m, vel $p+r$ dicitur ſubſtitui quantitati $\frac{a}{d}$. Quantitas autem $\frac{a}{d}$ vocatur valor ipſius quantitatis aſſumtæ m, aut $p+r$; unde ſcribitur $\frac{a}{d} = m$, $\frac{a}{d} = p+r$ &c.

Animadversio I.

72. Si magnitudo Algebrica dividenda omnes diviſoris literas contineat, hiſce omnibus in illa deletis, quod ſupereſt, erit *quotus* diviſionis. Sic diviſa magnitudine abc per b, *quotus* erit ac; diviſa per bc, *quotus* erit a. Eſt enim $b \times ac = abc$, ſicuti etiam $bc \times a = bca$ (§.38.). Igitur erit etiam $\frac{abc}{b} = ac$, $\frac{bca}{bc} = a$ (§.66.).

Animaadversio II.

73. Si quæ tantum literæ diviſoris in magnitudine dividenda habeantur, ipſis in utraque magnitudine deletis, quod in diviſore ſupereſt, illi ſubſcribatur, quod relinquitur in magnitudine diviſa. Hæc enim fractio erit *quotus* quæſitus. Sic *quotus* termini $abcd$ diviſi per adx erit $\frac{bc}{x}$. Si namque fractioni $\frac{bc}{x}$ ſubſtituatur quantitas m, erit $xm = bc$ (§.66.), atque adeo $admx = abcd$; cum poſita æqualitate terminorum xm, bc, perinde ſit omnino, ſive per xm, ſive per bc magnitudo ad multiplicetur. Eſt autem $\frac{adxm}{adx} = m$ (§.72.). Ergo erit quoque $\frac{abcd}{adx} = m$; ac proinde, ſi *quotienti* m illius valor $\frac{bc}{x}$ ſubſtituatur, erit $\frac{abcd}{adx} = \frac{bc}{x}$.

Animadversio III.

74. Si diviſor, & dividendum *coefficientes* habeant, diviſis, methodo ſuperius tradita, ipſis literis, *coefficiens* termini dividendi per diviſoris *coefficientem* dividatur, & *quotus* numericus *quotienti* Algebrico præfigatur. Quod ſi nullus ſit *quotus* Algebricus, *quotus* ipſe numericus pro *quotiente* quæſito habendus eſt. Sic diviſa magnitudine $8abx$ per $4ab$, *quotus* erit $2x$. Eſt enim $\frac{abx}{ab} = x$ (§.72.), & $\frac{8}{4} = 2$. Diviſa vero magnitudine $8md$ per magnitudinem $2md$, *quotus* erit 4.; cum ſit $\frac{md}{md} = 1$ (§.68.), & $\frac{8}{2} = 4$.

Ani-

ANIMADVERSIO IV.

75. Si numeri *coefficientes* divi poſſint, minime vero termini Algebrici, utpote omnino diſſimiles; aut viciſſim dividi queant termini, non ſic autem *coefficientes* eorundem numeri, dividendum tunc eſt, quod dividi poteſt; quod verò ſupereſt, debet ad fractionem reduci. Sic diviſa magnitudine $8bc$ per $4a$, *quotus* erit $\frac{2bc}{a}$. Diviſa autem magnitudine $7bc$ per $2b$, *quotus* erit $\frac{7c}{2}$. Cum enim diviſa magnitudine bc per a, *quotus* non poſſit aliter exprimi, quam per $\frac{bc}{a}$, & diviſo *coefficiente* 8. per *coefficientem* 4., *quotus* ſit 2., *quotus* termini $8bc$ diviſi per $4a$ nequit eſſe, niſi $\frac{2bc}{a}$. Similiter quoniam diviſo bc per b, *quotus* eſt c (§. 72.), nonniſi *coefficiens* 7. termini $7c$ dividendus remanet per *coefficientem* 2. Quamobrem pro *quotiente* ſcribendum eſt $\frac{7c}{2}$. Ceterum hujus *animadverſionis* ratio ex fractionum calculo infra tradendo manifeſte patebit. Enimvero cum productum ex multiplicatione fractionis $\frac{2bc}{a}$ per $4a$ ſit $\frac{8bca}{a}$, factum vero ex multiplicatione fractionis $\frac{7c}{2}$ per $2b$ ſit $\frac{14bc}{2}$, ſitque $\frac{8bca}{a} = 8bc$ (§. 74.), & $\frac{14bc}{2} = 7bc$, erit quoqe $\frac{8bc}{4a} = \frac{2bc}{a}$, & $\frac{7bc}{2b} = \frac{7c}{2}$ (§. 66.).

ANIMADVERSIO V.

76. Si termini, quorum alter per alterum dividendus eſt, eadem litera ſint expreſſi, & inæquales *exponentes* habeant, ſit eorum diviſio, auferendo *exponentem* diviſoris ab *exponente* magnitudinis dividendæ; & quod hinc ſupereſt, eidem termino appingendo. Ut ſi dividere oporteat b^4 per b^2, *quotus* erit b^2. Ratio eſt, quia cum b^4 idem ſit ac $bbbb$, & b^2 idem ac bb (§. 41.), ſicuti diviſo $bbbb$ per bb, *quotus* eſt bb (§. 72.) ita diviſo b^4 per b^2, *quotus* erit b^2.

ANIMADVERSIO VI.

77. Quod ſi tam diviſor, quam magnitudo dividenda eaſdem omnino literas contineant inæqualibus *exponentibus* affectas, *exponens* cujuslibet literæ diviſoris ſubducatur *exponenti*, quo eadem litera affecta eſt in termino dividendo. Si nihil reſpectu unius, vel alterius literæ, hac ſubductione facta, remaneat, litera hujuſmodi in *quotiente* negligenda eſt. Si quid vero ſupereſt, id idem literæ appingatur, eritque diviſionis *quotus*. Sic diviſa magnitudine $a^2 b^6$ per magnitudinem $a^1 b^2$, *quotus* erit ab^4. Conſtat enim eſſe $a^2 b^4 \times b^2 a^2 b^6$, & $a^1 b^2 \times ab_4 = a^4 b^6$ (§. 46.),

ANI-

Animadversio VII.

78. Demum ſi termini *exponentibus* affecti fuerint ſibi mutuo omnino diſſimiles, diviſor termino dividendo ſubſcribatur, perinde ac ſi *exponentes* non haberent. Sic fractio $\frac{a^2}{b^3}$ erit *quotus* magnitudinis a^2 per magnitudinem b^3 diviſæ.

Problema II.

Magnitudinem complexam per alteram complexam dividere.

Reſolutio.

79 Dividatur primus terminus magnitudinis dividendæ per illum terminum diviſoris, qui in illo continetur. Quotus inventus per totum diviſorem multiplicetur, quodque hinc fit productum, toti magnitudini dividendæ ſubducatur. Reſiduum iterum per eundem terminum dividatur, ductoque ipſo quotiente in integrum diviſorem, quod efficitur, auferatur ex priori reſiduo magnitudinis dividendæ; atque ita deinceps, donec, facta ſubductione, nihil remaneat. *Quotientes* partiales hac ratione inventi, jungantur ſimul ope ſignorum, quæ ſingulis competunt juxta leges infra tradendas. Hujuſmodi aggregatum erit quotus quæſitus.

Exemplum.

Dividenda ſit magnitudo $ea+eb+ec+da+db+dc$ per magnitudinem $e+d$. Primo itaque divido terminum ae per terminum e, cumque diviſionis *quotiens* ſit a (§. 72.), multiplico diviſorem $e+d$ per ipſum a, & productum hinc factum $ae+ad$ aufero a tota magnitudine $ae+eb+ec+da+db+dc$. *Quotum* a ad dexteram ſcribo, utpote qui primus eſt terminus *quotientis* quæſiti. Terminum eb reſidui $eb+ec+db+dc$ divido per diviſorem e; tum per *quotum* b multiplicato diviſore integro $e+d$, factum $eb+bd$ ſubtraho priori reſiduo $eb+ec+db+dc$, & quotum b *quotienti* a adjungo ope ſigni $+$, qui, ut patebit, illi debetur, ut proinde *quotus* hactenus inventus ſit $a+b$. Terminum ec poſterioris reſidui $ec+dc$ ſimiliter divido per eundem diviſorem e, & per *quotum* c multiplico integrum diviſorem $e+d$. Productum, quod hinc efficitur $ec+dc$, aufero a reſiduo $ec+dc$; & quoniam nihil ex hac ſubductione relinquitur, addito *quotiente* c quotienti $a+b$ ope ſigni $+$, quod termino c itidem convenit, concludo quantitatem $a+b+c$ eſſe *quotientem* quæſitum.

Demon-

Demonſtratio.

Multiplicato diviſore $e+d$ per *quotientem* $a+b+e$, quod hinc fit productum, eſt ipſa magnitudo diviſa $ae+eb+ec+da+db+dc$ (§. 49.). Ergo *quotus* hujuſce diviſionis eſt quantitas $a+b+c$ (§. 65.); atque adeo legitime peracta eſt ipſa diviſio (§. 66.).

ANIMADVERSIO I.

80. Quoniam vero in diviſione magnitudinum complexarum ratio habenda eſt ſignorum, quibus earum termini ſunt affecti, ut inde pateat, quibuſnam ſignis *quotientes* partiales ſimul jungi debeant, ſequentes regulæ aſſignantur.

I.

Plus per plus reddit plus.

81. Diviſa nimirum quantitate $+ab$ per $+a$, *quotus* erit $+b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $+a \times +b = +ab$ (§. 53.), erit quoque $\frac{+ab}{+a} = +b$ (§.66.).

I I.

Plus per minus reddit minus.

82. Ut ſi magnitudo $+ab$ dividatur per a, *quotus* erit $-b$.

Demonſtratio.

Si namque multiplicetur $-a$ per $-b$, productum efficitur $+ab$ (§.56.).
Ergo erit $\frac{+ab}{-a} = -b$ (§. 66.).

I I I.

Minus per plus reddit minus.

83. Videlicet diviſo termino $-ab$ per $+a$, *quotus* erit $-b$.

Demonſtratio.

Conſtat enim, eſſe $+a \times -b = -ab$ (§. 54.). Igitur erit $\frac{-ab}{+a} = -b$ (§. 66.)

I V.

Minus per minus reddit plus.

84. Ut ſi dividenda ſit magnitudo $-ab$ per $-a$, *quotus* erit $+b$.

Demonſtratio.

Manifeſtum namque eſt, ducto diviſore $-a$ in *quotum* $+b$, fieri $-ab$ (§. 55.). Ergo viciſſim, ſi $-ab$ per $-a$ dividatur, *quotus* erit $+b$ (§. 66.).

Corollarium.

85. In diviſione igitur, quemadmodum in multiplicatione, eadem ſigna reddunt $+$; diverſa vero $-$.

Animadversio II.

86. Quæ diximus §. 74., & *ſequentibus* de numeris *coefficientibus*, & *exponentibus* in diviſione magnitudinum ſimplicium, intelligenda ſunt etiam in diviſione magnitudinum complexarum, ſi ipſarum termini *coefficientibus* quoque, aut *exponentibus* numeris ſint affecti. Sic diviſa magnitudine $8am + 4mcb^3 + 2ab^2 + cb^5$ per $4m + b^2$, *quotus* erit $2a + cb^3$. Etenim diviſo $8am$ per $4m$, *quotus* eſt $2a$ (§. 74.). Ducto autem diviſore $4m + b^2$ in *quotientem* $2a$, productum efficitur $8am + 2ab^2$ (§ 51.), quo ſublato ex tota magnitudine diviſa, relinquitur $4mcb^3 + cb^5$. Diviſo ſimiliter termino $4mcb^3$ per eundem $4m$, *quotus* habetur cb^3 (§. 72.). Facta autem multiplicatione integri diviſoris per *quotientem* cb^3, emergit $4mcb^3 + cb^5$ (§. 45. 46.) quo ſubducto ex priori reſiduo, nihil ſupereſt. Ergo *quotus* hujuſce diviſionis erit $2a + cb^3$.

Animadversio III.

87. Si data magnitudo ſolum ex parte dividi poſſit, dividatur, quod poteſt dividi; ei vero, quod ſupereſt, quodque dividi nequit, integer diviſor ſubſcribatur, ipſaque fractio *quotienti* jam invento adiiciatur, ut in vulgari Arithemetica fieri ſolet. Sic diviſa magnitudine $ac + cb - da - db + mn - xy$ per $c - d$, *quotus* erit $a + b + \frac{mn - xy}{c - d}$. Etenim facta ultima ſubdu-

ctio.

ctione producti, quod naſcitur ex multiplicatione diviſoris $c - d$ per quotum $a + b$, relinquitur $mn - xy$, quod non poteſt dividi per ipſum $c - d$.

ANIMADVERSIO IV.

88. Demum ſi data magnitudo nullatenus dividi poſſit, diviſor, ducta lineola, dividendæ magnitudini ſubſcribatur. Quæ namque hinc efficitur fractio, erit *quotus* quæſitus, ut ſuperiori loco de incomplexis magnitudinibus diximus. Videlicet ſi magnitudo $a + b$ dividenda ſit per $c - d$, ſcribendum eſt pro *quoto* $\frac{a+b}{c-d}$

PROBLEMA III.

Magnitudinem complexam per incomplexam dividere.

Reſolutio.

89. Dividantur ſinguli termini complexæ magnitudinis, perinde ac ſi eſſent magnitudines ſimplices. Tum omnes *quoti* ſimul ſumantur iis mediantibus ſignis, quæ illis conveniunt. Aggregatum erit *quotus* quæſitus.

Exemplum.

Complexa magnitudo $ab + ad + ac$ dividenda ſit per incomplexam a. Quoniam igitur diviſo termino ab per a, *quotus* eſt b; diviſo ad per a, *quotus* eſt d; & diviſo ae per a, *quotus* eſt e (§. 72.), *quotus* totalis erit $b + d + e$.

Demonſtratio.

Etenim ſi diviſor a multiplicetur per *quotum* $b + d + e$, productum eſt ipſa magnitudo diviſa $ab + ad + ae$ (§. 60.). Ergo legitime peracta eſt ipſa diviſio (§. 66.).

ANIMADVERSIO.

90. Si diviſor nullo ſigno ſit affectus *quotientes* partiales iiſdem ſignis afficiendi ſunt, quibus termini diviſi *reſpective* donantur. Si vero ſignum negativum præfixum habeat, *quotus* termini affecti ſigno negativo affici debet ſigno poſitivo, & viciſſim ſigno negativo, ſi terminus diviſus affectus ſit ſigno poſitivo. Videlicet *quotus* magnitudinis $ab + ad + ae$ diviſæ per magnitudinem a, erit $b + d + e$. Eſt enim a idem ac $+ a$ (§. 6.). Contra vero *quotus* magnitudinis $ab - ad + ae$ diviſæ per terminum $- a$, erit $- b + d - e$. Ratio hujus regulæ quoad utramque partem patet ex §. 81., & ſequentibus.

PRO-

PROBLEMA IV.

Datæ magnitudinis diviſores omnes invenire.

91. Invenire oporteat omnes diviſores magnitudinis $aaab + aabb$.

Reſolutio.

Primo itaque dividatur data magnitudo per a, & *quotus* $aab + abb$ infra ipſam, diviſor vero a ad illius dexteram ſcribatur. Quotus $aab + abb$ iterum per a dividatur, & ejus *quotiens* $ab + bb$ collocetur infra priorem *quotum* $aab + abb$, diviſor vero a infra primum diviſorem a. Quoniam vero *quotus* $ab + bb$ dividi nequit per a, ſed tantum per b, ſacta illius diviſione per b, ſtatuatur *quotus* $a + b$ infra terminum $ab + bb$, & diviſor b infra a. Dividatur tandem $a + b$ per ſeipſum, cum per aliam quantitatem dividi nequeat. *Quotus* autem 1. ſcribatur infra ipſum diviſum $a + b$; diviſor vero $a + b$ inſra diviſorem b.

$aaab + aabb$	$a.$
$aab + abb$	$a.\ aa.$
$ab + bb$	$b.\ ab.\ aab.$
$b + b$	$a + b.\ aa + ab.\ aaa + aab.\ ab + bb.\ aab + abb.$
1	$aacb + aabb.$

Multiplicetur deinde quilibet diviſor inferior per omnes ſuperiores, & producta, ſemel tantum, quæ ſimilia ſunt, ad illius dexteram ſcribantur, videlicet primo a per a, & productum aa ponatur ad dexteram ipſius a. Deinde b primo per a, tum per aa, & fiant producta ab, aab, quæ ad illius dexteram collocentur. Demum $a + b$ primo per a, dein per aa, tum per b, poſtea per ab, poſtremo per aab, & producta illi ad dexteram appingantur, ut patet. Omnes hujuſmodi termini erunt diviſores quæſiti.

Demonſtratio.

Perſpicuum namque eſt, omnes hujuſmodi terminos in data magnitudine $aacb + aabb$ reperiri, prout requiritur, ut diviſoris rationem habeant.

S C H O L I O N.

92. Eadem methodo inveniuntur omnes diviſores dati cujuſvis numeri. Sic omnes diviſores numeri 90. erunt, qui infra B poſiti habentur

90.

Digitized by Google

90.	B.
45.	2.
15.	3. 6.
5.	3. 9. 18.
1.	5. 10. 15. 30. 45. 90.

Nimirum, ut inveniantur omnes diviſores numeri 90, ipſum primo divido per 2, & *quotum* 45 infra ipſum 90, diviſorem vero 2 infra B ſcribo. *Quotum* 45, cum per 2 dividi nequeat, divido per 3, cumque hujuſce diviſionis *quotiens* ſit 15, ipſum 15 ſcribo infra *quotientem* 45, & diviſorem 3 infra diviſorem 2. Divido deinde *quotum* 15 iterum per 3, cum per 4 dividi nequeat, atque ipſius *quotum* 5 infra ipſum 15, diviſorem vero 3 infra diviſorem 3 ſcribo. Divido tandem *quotum* 5 per 5, utpote per ipſum dumtaxat diviſibilem, & diviſorem 5 infra diviſorem 3 ſcribo, *quotum* autem 1 infra *quotum* 5. Hac diviſione peracta, multiplico diviſorem primum 2 per ſecundum 3, & productum 6. ſcribo ad illius dexteram. Deinde ſingulos diviſores inferiores per ſuperiores, eorumque facta ad illorum dexteram itidem ſtatuo, iis neglectis in inferioribus lineis, quæ in ſuperioribus jam habentur. Erunt itaque omnes diviſores numeri 90, qui infra B reperiuntur.

SECTIO SEXTA.

De fractionum natura, & calculo.

DEFINITIO I.

93 NUmerus *fractus*, qui etiam *fractio*, & *minutia* vocari ſolet, *dicitur ille, qui refertur ad unitatem, veluti pars ad totum*. Ut ſi unitas, totum aliquod diviſibile repræſentans, ponatur diviſa in plures partes æquales, ex quibus aliquot in calculo ſpectentur, numerus indicans, quot ex hiſce unitatis particulis ſumtæ ſint, *numerus fractus*, ſive *fractio* nuncupatur. Duobus idcirco numeris quævis *fractio* exprimitur, quorum alter *numerator fractionis* dicitur, alter ejuſdem *denominator*.

DEFINITIO II.

94. *Numerator fractionis eſt numerus indicans, quot particulæ unitatis ſumendæ ſint. Denominator vero eſt numerus, qui, in quot particulas unitas ſit diviſa, atque adeo quales unitatis partes ipſa ſint, deſignat.* Ut ſi unitas ponatur diviſa in *quinques partes*, ex quibus *tres* in calculo computentur, numerus 3. erit numerator; numerus vero 5. erit denominator fractionis, qua *tres quintæ partes* unitatis exprimuntur.

Digitized by Google

HYPOTHESIS I.

95. Ita porro hujuſmodi numeri collocantur, ducta nimirum lineola, *numerator* ſupra, *denominator* infra illam ſcribitur. Sic ad deſignandas *tres quintas* partes unitatis, ſcribitur $\frac{3}{5}$. Ad indicandas *ſeptem* partes *decimas*, ſcribitur $\frac{7}{10}$; atque ita de ceteris.

COROLLARIUM I.

96. *Denominator fractionis cujuſcunque unitatem adæquat*. Refert enim unitatem in plures æquales partes diviſam.

COROLLARIUM II.

97. Hinc *ſi numerator fractionis fuerit æqualis denominatori, fractio erit æqualis unitati. Si fuerit minor, fractio erit minor unitate. Si vero fuerit major, fractio unitatem excedet*. Sic fractio $\frac{3}{3}$ erit $= 1$. Fractio $\frac{2}{3} < 1$. Fractio $\frac{5}{2} > 1$.

SCHOLION.

98. Fractio, cujus numerator denominatorem ſuperat, vel adæquat, *ſpuria* vocatur. Illa vero, cujus numerator a denominatore deficit, *naturalis* dici ſolet. Fractionis namque natura in eo poſita eſt, ut aliquot tantum unitatis minutias exhibeat.

COROLLARIUM III.

99. *Quæ pars, vel partes denominatoris eſt fractionis numerator, eadem pars, vel partes unitatis eſt ipſa fractio*. Videlicet ficuti numerator 2. fractionis $\frac{2}{3}$ exprimit *duas tertias* partes denominatoris 3, ita fractio $\frac{2}{3}$ *duas tertias* partes unitatis deſignat.

SCHOLION.

100. *Quotus* propterea unius magnitudinis per aliam diviſæ optime exprimitur in Algebra per fractionem, cujus numerator ſit magnitudo dividenda, denominator vero magnitudo dividens. Quandoquidem hujuſmodi fractio eodem plane modo unitatem continet, vel in unitate continetur, quo magnitudo dividenda diviſorem continet, vel in illo comprehenditur.

Co-

COROLLARIUM IV.

101. *Fractio naturalis eo minor eſt, quo magis illius numerator a denominatore deficit*. Hoc enim ipſo pauciores unitatis particulas exhibet.

COROLLARIUM V.

102. *Quo magis propterea fractionis denominator, eodem manente numeratore, augetur, eo minoris valoris fractio ipſa efficitur*. Sic fractio $\frac{3}{100}$ minor eſt fractione $\frac{3}{10}$, fractio $\frac{3}{10000}$ fractione $\frac{3}{100}$, atque ita deinceps.

COROLLARIUM VI.

103. *Omnis fractio naturalis poteſt minui in infinitum*. Poteſt enim denominator in infinitum augeri, quin numerator mutetur.

COROLLARIUM VII.

104. *Denominatores fractionum homogenearum æquales ſunt inter ſe, licet numeris inæqualibus exprimantur*. Omnes enim unitatem referunt, quamvis non in totidem ex æquo partes diviſam.

DEFINITIO III.

105. *Fractiones ejuſdem nominis dicuntur illæ, quæ eundem denominatorem habent*; ut fractiones $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, & univerſaliter $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{a}$.

DEFINITIO IV.

106. *Illæ fractiones vocantur diſſimiles, quarum denominatores ſunt inter ſe diverſi*. Hujuſmodi ſunt fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, & univerſaliter $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Ad diſſimilitudinem porro fractionum perinde omnino eſt, ſive eodem, ſive diverſo numero earum numerator exprimatur. Semper enim ſtat, diverſæ naturæ eſſe particulas illas unitatis, quas fractiones ipſæ deſignant, & exhibent.

DEFINITIO V.

107. *Duæ fractiones dicuntur ejuſdem valoris, ſeu æquales, cum numeratores ſunt eadem partes, vel eadem partes ſuorum denominatorum*. Sic duæ fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{16}{24}$ ſunt æquales; quia ſicuti numerator 2 fractionis $\frac{2}{3}$ exhibet *duas tertias* partes

denominatoris 3., ita numerator 16 fractionis $\frac{16}{24}$ *duas tertias* partes continet denominatoris 24. Æquales porro dicuntur; quia eaſdem, ut patet, unitatis partes deſignant, licet diverſis numeris exprimantur.

DEFINITIO VI.

108. *Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia fractio minimis terminis expreſſa, illi æqualis efficitur.* Sic fractio $\frac{8}{16}$ reducitur ad minimos terminos, cum illi ſubſtituitur fractio $\frac{1}{2}$. Hæc enim illi æqualis eſt (§.147.), ejuſque termini ſunt numeri omnium, quibus una pars dimidia unitatis exprimi poteſt, minimi.

DEFINITIO. VII.

109. *Fractio fractionis ea eſt, cujus denominator numeratorem exhibet alterius fractionis in alias æquales partes diviſum, perinde ac ſi eſſet unum aliquod totum.* Ut ſi *tres quadrantes* unitatis, quos deſignat fractio $\frac{3}{4}$, dividantur in *quinque* partes æquales, ex quibus *duæ* in calculo computandæ ſint, fractio $\frac{2}{5}$ hujuſmodi particulas exhibens, dicitur fractio fractionis $\frac{3}{4}$.

SCHOLION.

110. Compendii gratia, fractio unitatis dicitur fractio *prima*, ſive *ſimplex*. Fractio fractionis vocatur fractio *ſecunda*. Fractio fractionis *ſecundæ* dicitur fractio *tertia*, atque ita deinceps.

COROLLARIUM.

111. *In omni fractionis denominator eſt minor unitate.* Is enim fractionem adæquat, quæ eſt unitate minor. Sic denominator 5 fractionis $\frac{2}{5}$ fractionis $\frac{3}{4}$ eſt minor unitate, quia exprimit *tres quadrantes* unitatis in *quinque* partes æquales diviſos, ex quibus duas importat fractio $\frac{2}{5}$.

DEFINITIO VIII.

112. *Unus numerus alterum metiri dicitur, cum ſi ex hoc, quoties poteſt, ille auferatur, nihil relinquitur.* Sic numerus 3 metitur numerum 12, quia ſi numerus 3 quater ſubducatur numero 12, nihil ſupereſt.

DE-

DEFINITIO IX.

113 *Maxima communis duorum numerorum menſura eſt numerus illorum omnium maximus, qui datos ipſos numerus metiri poſſunt.* Sic numerus 5 eſt maxima communis menſura duorum numerorum 20, 25. Quandoquidem inveniri non poteſt numerus major ipſo numero 5, qui duos 20, 25. adæquate metiatur.

HYPOTHESIS II.

114. Denominatores fractionum, quarum calculus inſtituitur, idem totum referunt in partes diviſum.

Principium fundamentale.

Fractiones ejuſdem nominis ab integris numeris reipſa non differunt.

115. Particulæ namque unitatis, quæ fractionibus ejuſdem nominis deſignantur, ſunt ſibi mutuo homogeneæ. Cumque earum qualibet ſit in ſe una, ſi ſpectentur ſine ulla relatione ad totum, cujus ſunt partes, multitudinem unitatum homogenearum conſtituunt, atque adeo numerum integrum. Id porro magis adhuc perſpicuum fiet, ſi conſideremus, numerum quemcumque integrum, qui rem quantam deſignet, fractum evadere, ſi majori toto comparetur. Profecto *duo pedes* ſunt *duæ quintæ partes* unius *paſſus*, & *quatuor paſſus* ſunt *duæ tertiæ* partes unius *hexapedæ*. Et hinc eſt, veteres Mathematicos nullam de fractis numeris mentionem feciſſe, quod nempe, ut notat Cl. Volfius (a), eos pro peculiaribus numeris minime habuerint.

PROBLEMA I.

Fractiones diſſimiles ad eandem denominationem revocare.

Reſolutio.

116. Si duæ ſint fractiones ad idem nomen revocandæ, multiplicentur ſingularum tam numerator, quam denominator per denominatorem alterius. Si vero plures ſint, quam duæ, ſingularum numerator, & denominator multiplicentur per productum, quod ex aliarum denominatoribus in ſe invicem ductis efficitur.

Exemplum I.

Revocandæ ſint ad idem nomen duæ fractiones diſſimiles $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Multi-

(a) *Oſteologiæ* § 299.

plicentur igitur tam numerator, quam denominator fractionis $\frac{a}{b}$ per denominatorem d; ſicuti etiam tam numerator, quam denominator fractionis $\frac{c}{d}$ per denominatorem b. Erunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$ fractiones quæſitæ.

Exemplum II.

Modo revocare oporteat ad idem nomen tres fractiones diſſimiles $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Itaque termini fractionis $\frac{a}{b}$ multiplicentur per df factum ex aliarum $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ denominatoribus. Termini fractionis $\frac{c}{d}$ per bf productum, quod fit ex denominatoribus duarum $\frac{a}{b}$ $\frac{e}{f}$ in ſe ductis. Termini vero fractionis $\frac{e}{f}$ per bd factum ex denominatoribus aliarum $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{d}$. Erunt $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{abf}$, $\frac{cbd}{fbd}$ fractiones ipſæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ ad idem nomen revocatæ.

Demonſtratio.

Multiplicando terminos fractionis $\frac{a}{b}$ per integram quantitatem d, toties uterque ſumitur, quot unitates in ipſa quantitate d numerantur. Ergo numerator, ſive factum ad eſt eadem pars, vel eædem partes producti, ſeu denominatoris bd fractionis $\frac{ad}{bd}$, quæ pars, vel partes eſt numerator a denominatoris b fractionis $\frac{a}{b}$. Quamobrem idem eſt valor utriuſque fractionis $\frac{ad}{bd}$, $\frac{a}{b}$ (§. 107.) Eandem ob cauſam erit $\frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$, $\frac{adf}{bdf} = \frac{a}{b}$, $\frac{cbf}{dbf} = \frac{c}{d}$, $\frac{ebd}{fbd} = \frac{e}{f}$. Ceterum generalis hujus reſolutionis demonſtratio tradetur lib. I. *Elementorum*.

PROBLEMA II.

Fractiones ſimul addere.

Reſolutio.

117 Si fractiones diſſimiles fuerint, revocentur ad idem nomen (§. 116.) Simul dein colligantur earum numeratores, & huic ſummæ communis denominator ſubſcribatur. Fractio namque hujuſmodi erit ſumma quæſita.

Exem-

Exemplum.

Fractioni $\frac{d}{e}$ addenda ſit fractio $\frac{a}{e}$. Facta numeratorum ſumma $d+a$, ſubſcribatur illi communis denominator e. Erit fractio $\frac{d+a}{e}$ ſumma quæſita: Si autem colligendæ ſimul ſint fractiones diverſi nominis $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, facta earum reductione ad idem nomen, earum ſumma erit fractio $\frac{ad+cb}{bd}$.

Demonſtratio.

Cum enim fractiones ſint ejuſdem nominis, ab integris numeris reipſa non differunt (§. 115.). Ergo eodem modo, quo integrorum, earum additio perficienda eſt, nulla nimirum habita ratione denominatoris, ſive totius, cujus partes referunt. Igitur &c.

PROBLEMA III.

Unam fractionem alteri ſubtrahere.

Reſolutio.

118 Revocentur ad idem nomen, ſi diſſimiles fuerint. Tum numerator fractionis ſubtrahendæ alterius numeratori ſubducatur, & reſiduo communis ſubſcribatur denominator. Quæ namque hinc emergit fractio, erit differentia quæſita.

Exemplum.

Fractioni $\frac{a}{b}$ ſubducenda ſit fractio $\frac{c}{d}$. Facta igitur earum reductione ad idem nomen, conſtitutis nempe fractionibus $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, numerator cb fractionis $\frac{cb}{db}$ ſubtrahatur fractionis $\frac{ad}{bd}$ numeratori ad, & reſiduo $ad-cb$ ſubſcribatur communis denominator bd. Erit $\frac{ad-cb}{bd}$ reſiduum quæſitum.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti.

PROBLEMA IV.

Unam fractionem per aliam fractionem dividere.

Reſolutio.

119. Invertantur termini fractionis, per quam alia dividenda eſt. Deinde numerator unius per alterius numeratorem, & denominator per denominatorem multiplicentur. Fractio ex hiſce productis emergens erit *quotus* quæſitus.

Exemplum.

Dividere oporteat fractionem $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$. Invertantur itaque termini fractionis $\frac{c}{d}$, fiat nimirum fractio $\frac{d}{c}$. Tum multiplicato numeratore a fractionis $\frac{a}{b}$ per numeratorem d fractionis $\frac{d}{c}$, & denominatore b per denominatorem c, ex productis ad, bc fiat fractio $\frac{ad}{bc}$. Hæc erit *quotus* fractionis $\frac{a}{b}$ diviſæ per fractionem $\frac{c}{d}$.

Demonſtratio.

Si fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ reducantur ad idem nomen, fractio $\frac{a}{b}$ mutatur in fractionem $\frac{ad}{bd}$, & fractio $\frac{c}{d}$ in fractionem $\frac{cb}{db}$ (§. 116.). Hac autem reductione facta, fractiones ipſæ ſpectari poſſunt perinde ac ſi eſſent quantitates integræ, videlicet particulæ expreſſæ numeratoribus a, c ſive ad, cb poſſunt conſiderari ſine ulla comparatione ad denominatores b, d, ſeu bd (§. 115.); atque adeo earum diviſio eodem modo fieri debet, quo integrorum diviſio perficitur. Fractio autem $\frac{ad}{bc}$ exprimit *quotum* quantitatis ad diviſæ per quantitatem bc (§. 70.). Ergo hæc ipſa fractio *quotum* deſignabit fractionis $\frac{a}{b}$ ſive $\frac{ad}{bd}$ diviſæ per fractionem $\frac{c}{d}$, ſeu $\frac{cb}{db}$.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

120. Hinc, ſi fractiones, quarum una per aliam dividenda eſt, fuerint ejuſdem nominis, ad earum diviſionem peragendam ſatis eſt, ut numeratori fractionis dividendæ alterius numerator ſubſcribatur.

PROBLEMA V.

Fractionem per fractionem multiplicare.

Reſolutio.

121. Multiplicentur inter ſe mutuò tam numeratores, quam denominatores fractionum, quarum una in aliam ducenda eſt, & ex productis fiat fractio, quæ erit factum quæſitum.

Exemplum.

Ut ſi multiplicanda ſit fractio $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$ productum erit fractio $\frac{ac}{bd}$.

Demonſtratio.

Etenim diviſa fractione $\frac{ac}{bd}$ per fractionem $\frac{a}{b}$; *quotus* eſt fractio $\frac{acb}{bda}$; Diviſa vero per fractionem $\frac{c}{d}$, quotus eſt fractio $\frac{acd}{bdc}$ (§. 119.). Conſtat autem, eſſe $\frac{acb}{bda} = \frac{c}{d}$, & $\frac{acd}{bdc} = \frac{a}{b}$ (§. 73.). Ergo erit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (§. 67.). Alia quoque dabitur hujus operationis demonſtratio infra Lib. I.

PROBLEMA VI.

Integram quantitatem ceu fractionem exprimere.

Reſolutio.

122. Integræ quantitati ſubſcribatur unitas: Fractio hinc emergens erit fractio quæſita.

Exem-

Exemplum.

Nimirum ut veluti fractionaria exprimatur integra quantitas a, ſcribendum eſt $\frac{a}{1}$:

Demonſtratio.

Etenim diviſa integra quantitate a per unitatem, *quotus* eſt ipſa magnitudo a diviſa (§. 69.).

PROBLEMA VII.

Fractionem per integram quantitatem dividere.

Reſolutio.

123. Multiplicetur denominator datæ fractionis per datam integram quantitatem. Fractio hinc facta erit *quotus* fractionis datæ per integram illam quantitatem diviſæ.

Exemplum.

Ut ſi videre oporteat fractionem $\frac{a}{b}$ per quantitatem d, *quotus* erit $\frac{a}{bd}$.

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit $\frac{d}{1} = d$ (§. 69.), & $a \times 1 = a$ (§. 37.), *quotus* fractionis $\frac{a}{b}$ diviſæ per integram quantitatem d, erit $\frac{a}{bd}$ (§. 119.).

PROBLEMA VIII.

Fractionem per integram quantitatem multiplicare.

Reſolutio.

124. Numerator fractionis multiplicetur per datam quantitatem, & producto idem denominator ſubſcribatur. Quæ hinc oritur fractio, erit factum quæſitum.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum.

Videlicet factum ex fractione $\frac{a}{b}$ multiplicata per integram quantitatem d, erit fractio $\frac{ad}{b}$.

Demonſtratio.

Multiplicare namque fractionem $\frac{a}{b}$ per quantitatem d idem eſt, ac illam multiplicare per fractionem $\frac{d}{1}$ (§. 122.). Eſt autem $\frac{a}{b} \times \frac{d}{1} = \frac{ad}{1b}$, ut patet. Ergo erit quoque $\frac{a \times d}{b} = \frac{ad}{b}$.

PROBLEMA IX.

Integram quantitatem in fractionem dati nominis convertere.

125. Integra quantitas d mutanda ſit in fractionem, cujus denominator ſit b.

Reſolutio.

Magnitudo d multiplicetur per denominatorem b, & producto db idem b ſubſcribatur. Erit $\frac{db}{b}$ fractio quæſita.

Demonſtratio.

Eſt enim $\frac{db}{b} = d$ (§. 72.).

S C H O L I O N.

126. Facta converſione integræ magnitudinis in fractionem dati nominis, difficile non erit ex hactenus traditis I. *plures integras magnitudines cum fractionibus in unam ſummam colligere* II. *fractionem ab integra quantitate, ſicuti etiam integram quantitatem cum fractione ab integra cum fractione auferre* III. in-

integram cum fractione per integram, vel integram cum fractione per integram cum fractione tam multiplicare, quam dividere. Tunc enim inſtituitur calculus, ut in fractis.

PROBLEMA X.

Fractionem ſpuriam ad integram quantitatem reducere.

Reſolutio.

127. Numerator per denominatorem dividatur: *Quotus* diviſionis erit quantitas integra, cui data fractio eſt æqualis.

Exemplum.

Ut ſi *quotus* numeratoris *d* fractionis *ſpuriæ* $\frac{a}{b}$ diviſi per denominatorem *b* fuerit *d*, erit *d* quantitas integra, quam adæquat fractio $\frac{a}{b}$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\frac{a}{b} = d$, erit etiam $bd = d$ (§. 65.); adeoque &c.

SCHOLION.

128. Si *quotus* hujuſce diviſionis fuerit integra quantitas cum fractione, fractio ad integram quantitatem reduci minime poterit, ſed tantum ad mixtam magnitudinem ex integra & fracta, ut patet de fractione $\frac{25}{3}$, quæ numero mixto $8 + \frac{1}{3}$ eſt æqualis.

PROBLEMA XI.

Unam fractionem in aliam dati nominis mutare.

129. Fractio $\frac{a}{b}$ mutanda ſit in fractionem, cujus denominator ſit *d*, quæque ſit ipſi $\frac{a}{b}$ æqualis.

De-

Reſolutio.

Multiplicato numeratore a fractionis $\frac{a}{b}$ per datum denominatorem d, productum ad dividatur per denominatorem b ipſius fractionis, cujus diviſionis *quotiens* ſit x. Ex hoc igitur, & ex dato denominatore d fiat fractio $\frac{x}{d}$, quæ erit fractio quæſita, erit nempe $\frac{x}{d} = \frac{a}{b}$.

Demonſtratio.

Cum enim quantitas x adæquet productum $\frac{ad}{b}$, quod fit ex multiplicatione fractionis $\frac{a}{b}$ per integram quantitatem d, diviſa quantitate x per magnitudinem d multiplicantem, *quotus* erit ipſa quantitas multiplicata $\frac{a}{b}$ (§. 67.). Quamobrem erit $\frac{x}{d} = \frac{a}{b}$.

S C H O L I O N.

130. Uſus hujus reductionis ampliſſimus eſt. Eo enim mediante dignoſcitur valor fractionis in partibus ejuſdem totius, quarum valor eſt nobis notus. Ut ſi quæratur, *quot* paſſus adæquent quatuor quintæ partes unius milliarii, hac methodo palam fiet, partes hujuſmodi comprehendere, ſeu æquare paſſus 800, cum ſit $\frac{4 \times 1000}{5} = \frac{4000}{5} = \frac{800}{1000}$.

PROBLEMA XII.

Fractionem fractionis ad ſimplicem fractionem reducere.

131. Fractio $\frac{a}{b}$ fractionis $\frac{d}{e}$ reducenda ſit ad fractionem *ſimplicem*, ſive *primam*.

Re-

Reſolutio.

Multiplicentur inter ſe mutuo utriuſque fractionis tam numeratores, quam denominatores *reſpective*, & ex productis *ad*, *be* fiat fractio $\frac{ad}{be}$, quæ erit fractio *prima* quæſita.

Demonſtratio.

Etenim ſi ponatur $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, & $\frac{d}{e} = \frac{6}{8}$, erit $\frac{ad}{be} = \frac{12}{24}$. Conſtat autem, *duos trientes* fractionis primæ $\frac{6}{8}$, quos deſignat fractio *ſecunda* $\frac{2}{3}$, eſſe $\frac{4}{8}$, ſive *ſemiſſem* unitatis, ad quam fractio ipſa $\frac{6}{8}$ immediate refertur. Ergo cum ſit $\frac{12}{24} = \frac{4}{8}$ (§. 107.), fractio $\frac{12}{24}$ erit fractio *prima*, ad quam fractionem *ſecundam* $\frac{2}{3}$ revocare oportebat. Ceterum generalis hujus reſolutionis demonſtratio tradetur infra Lib. I. *Elementorum*.

S C H O L I O N I.

132. Fractio fractionis fractionis eodem modo ad fractionem primam reducitur. Ut ſi fractio *prima* fuerit $\frac{a}{b}$, *ſecunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{e}{f}$, fractio ipſa $\frac{e}{f}$ reducitur ad fractionem *primam*, ſi multiplicatis ex una parte numeratoribus a, c, e, & ex altera denominatoribus b, d, f, ex productis ace, bdf fiat fractio $\frac{ace}{bdf}$.

S C H O L I O N II.

133. Facta reductione fractionis *ſecundæ*, *tertiæ*, *quartæ* &c. ad fractionem *ſimplicem*, earum *additio*, *ſubtractio*, *multiplicatio*, & *diviſio* eodem artificio peraguntur, quo eædem operationes fiunt in fractionibus ſimplicibus.

PRO-

PROBLEMA XIII.

Maximam duorum numerorum menſuram invenire.

134. Dati ſint duo numeri 95, 80., quorum maximam communem menſuram invenire oporteat.

Reſolutio.

Minor 80 ſubducatur, quoties poteſt, majori 95, ſicuti etiam reſiduum 15 ab ipſo minori 80, & hujus reſiduum 5 a priori reſiduo 15, *quoties* itidem poteſt, auferatur; cumque ex hac ultima ſubtractione nihil ſuperſit, numerus 5 erit maxima communis menſura duorum 95, 80.

Demonſtratio.

Cum numerus 5 metiatur per hypotheſim numerum 15, & numerus 15 numerum 75, numerus 5 metietur etiam numerum 75, atque adeo etiam numerum 80; cum ſit $75+5=80$, nec non numerum 95, cum habeatur $80+15=95$. Numerus igitur 5 eſt menſura communis duorum numerorum 80, 95. Quod vero ſit menſura ipſorum maxima, ſic oſtenditur. Etenim ſi non: maxima ipſorum menſura ſit numerus x major numero 5. Cum ergo numerus x metiatur utrumque numerum 80. 95, metietur etiam numerum 15, quo numerus 95 excedit numerum 80. Conſtat autem, ex numero 15 *quinquies* ſublato a numero 80, ſupereſſe 5. Ergo numerus x, ſicuti metitur numerum 15, & numerum 80, metiri etiam debet reſiduum 5. Id autem fieri nequit; cum numerus x poſitus fuerit major numero 5. Igitur numerus x non erit maxima communis menſura duorum numerorum 80, 95, eandemque ob cauſam nullus numerus diverſus a numero 5 pro maxima menſura duorum 80, 95 ſtatui poteſt.

PROBLEMA XIV.

Fractionem numericam ad minimos ipſius terminos reducere.

135. Eſto fractio numerica $\frac{12}{18}$ ad minimos ipſius terminos reducenda.

Reſolutio.

Inventa per *problema* præcedens, maxima communis menſura numeratoris 12, & denominatoris 18, ſcilicet numero 6. uterque terminus 12, 18 per ip-

ipſum 6 dividatur. Cumque ſit $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{18}{6} = 3$, ex hiſce *quotientibus* 2, 3 fiat fractio $\frac{2}{3}$, quæ erit fractio quæſita.

Demonſtratio.

Conſtat enim, numeratorem 2 fractionis $\frac{2}{3}$ eſſe eaſdem partes denominatoris 3, quæ denominatoris 12 fractionis $\frac{12}{18}$ eſt numerator 12. Igitur erit $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ (§. 107.). Ceterum generalis hujus operationis demonſtratio tradetur lib. I. *Elementorum*, ubi oſtendemus, *quotientes duarum inæqualium magnitudinem per eandem diviſarum eſſe directe inter ſe, ut ipſæ magnitudines diviſæ.*

S C H O L I O N.

136. Si terminos datæ fractionis ſola unitas metiatur, fractio ipſa ad minimos terminos reduci nequit. Quandoquidem *quotus* magnitudinis per unitatem diviſæ diverſum aliquid non eſt ab ipſa diviſa magnitudine (§. 69.)

SECTIO SEPTIMA.

De variis magnitudinem Algebricarum gradibus, eorumque geneſi & analyſi.

CUm quævis magnitudo Algebrica poſſit per aliam, ſicuti etiam per ſeipſam, non tantum ſemel, verum etiam pluries, prout libuerit, multiplicari, pluries magnitudinum Algebricarum gradus in Algebra diſtinguuntur.

DEFINITIO I.

137. *Magnitudo* unius dimenſionis *dicitur illa, ſive ſimplex ea ſit, ſive complexa, quæ ex aliis in ſe invicem ductis non conſurgit.* Hujuſmodi ſunt magnitudines a, b, $m + n - x$ &c.

DEFINITIO II.

138. *Magnitudo* duarum dimenſionum *ea eſt, quæ ex una magnitudine in alteram ducta producitur, dummodo tamen magnitudines ſe invicem multiplican-*

Digitized by Google

cantes non ſint producta ex aliis. Talis eſt magnitudo *ab*, ſicuti etiam magnitudo $ac + cb + da + db$. Altera enim ex ductu magnitudinis *a* in magnitudinem *b*, altera ex multiplicatione *binomii* $a + b$ per *binomium* $c + d$ efficitur.

SCHOLION.

139. Magnitudo *duarum dimenſionum* dicitur etiam *rectangulum Algebricum*, cujus latera vocari ſolent magnitudines illæ, ex quarum multiplicatione emergit.

DEFINITIO III.

140. *Magnitudo* trium dimenſionum *vocatur illa, quæ ex multiplicatione inter ſe mutuo trium magnitudinum unius dimenſionis efficitur*. Talis eſt magnitudo *abc*.

SCHOLION.

141. Magnitudines *trium dimenſionum* vocantur *parallelepipeda Algebrica*, quorum latera ſunt illæ magnitudines, ex quibus in ſe invicem ductis fiunt.

DEFINITIO IV.

142. *Magnitudo* quatuor dimenſionum *eſt illa, quæ ex quatuor magnitudinibus unius dimenſionis in ſe invicem ductis producitur*. Hujuſmodi eſt magnitudo *abcd*. Eodem modo ratiocinare de magnitudinibus *quinque*, *ſex*, *ſeptem* &c. *dimenſionum*. Nihil enim prohibet, quominus hac in re in infinitum progrediamur.

Geneſis, & ordo poteſtatum Algebricarum.

DEFINITIO V.

143. *Poteſtas Algebrica*, quæ etiam *dignitas* dicitur, *eſt productum, quod fit ex data magnitudine per ſe ipſam ſemel, aut bis, vel ter &c. multiplicata*. Quamvis autem *poteſtates*, ſive *dignitates* cujuſvis magnitudinis infinitæ prorſus ſint, cum illius magnitudinis multiplicatio in infinitum protrahi poſſit, ſex tamen potiſſimum memorantur, videlicet *radix*, *quadratum*, *cubus*, *quadrato-quadratum*, *quadrato cubus*, & *cubo-cubus*. Radix dicitur *poteſtas prima*, quadratum *poteſtas ſecunda*, cubus *poteſtas tertia*, & ſic deinceps.

DEFINITIO VI.

144. *Poteſtas prima eſt magnitudo quæcunque, ex qua aliquoties in ſeipſam ducta altera producitur*. Ut ſi magnitudo *aabb* conſideretur quatenus producta ex ductu magnitudinis *ab* in ſeipſam, quantitas *ab* erit *poteſtas prima*, *radix*, ſive *latus* magnitudinis *aabb*.

Digitized by Google

DEFINITIO VII.

145. *Poteſtas ſecunda, ſive quadratum, eſt factum ex multiplicatione datæ cujusvis magnitudinis per ſeipſam. Magnitudo vero, ex qua in ſeipſam ſemel ducta quadratum efficitur*, radix quadrata *nuncupatur*. Sic magnitudo *aa* eſt *quadratum*, ſive *poteſtas ſecunda* magnitudinis *a*. Magnitudo vero *a* eſt *radix quadrata* ipſius *aa*.

DEFINITIO VIII.

146. *Poteſtas tertia, ſeu cubus, eſt productum, quod fit ex multiplicatione quadrati per ſuam radicem. Si autem ipſa radix ad hujuſmodi productum refertur, dicitur radix cubica*. Talis eſt magnitudo *aaa*. Fit enim ex ductu *quadrati aa* in ſuam *radicem a*. Magnitudo vero *a* vocatur *radix cubica* producti *aaa*.

DEFINITIO IX.

147. *Poteſtas quarta, ſive quadrato-quadratum, eſt productum conſurgens ex multiplicatione quadrati per ſeipſum. Poteſtas quinta, ſeu quadrato-cubus, eſt productum, quod fit ex ductu quadrati datæ quantitatis in ejuſdem cubum. Demum poteſtas ſexta, ſeu cubo-cubus, eſt productum, quod ex ductu cubi in ſeipſum efficitur. Quantitas aaaa eſt quadrato-quadratum, ſeu poteſtas quarta* magnitudinis *a*. Quantitas *aaaaa* eſt *quadrato-cubus*, ſive *poteſtas quinta* magnitudinis *a*. Magnitudo vero *aaaaaa* eſt *cubo-cubus*, ſeu *poteſtas ſexta* quantitatis *a*. Ipſa autem quantitas *a* eſt radix *quadrato quadrata*, ſi ad productum *aaaa*; *quadrato-cubica*, ſi ad productum *aaaaa*; *cubo cubica*, ſi ad productum *aaaaaa* referatur. Idipſum dicito de *poteſtatibus* magnitudinum complexarum.

SCHOLION.

148. Una eademque magnitudo poteſt eſſe potentia ſuperior, ſimulque inferior, ſi diverſis terminis comparetur. Sic magnitudo *aaaaaa* eſt *poteſtas ſexta* termini *a*, *tertia* termini *aa*, *ſecunda* vero termini *aaa*.

DEFINITIO X.

149. *Exponens dignitatis eſt numerus indicans gradum, ad quem magnitudo, quam afficit, multiplicationis ope evecta eſt*. Sic *exponens* 2 quantitatis a^2 dicitur *exponens ſecundæ poteſtatis*, ſeu *quadrati* magnitudinis *a*. *Exponens* 3 quantitatis a^3 vocatur *exponens tertiæ poteſtatis*, ſive *cubi* magnitudinis *a*, atque ita deinceps. Conſtat enim, a^2 idem eſſe ac *aa*, a^3 idem ac *aaa* &c. (§. 46.) ſicuti etiam *aa* eſſe *quadratum*, & *aaa cubum* ipſius quantitatis *a* (§. 145. 146.).

Digitized by Google

DEFINITIO XI.

150. *Magnitudinem ad determinatam poteſtatem elevare eſt invenire productum, quod factum ſit ex ipſa data magnitudine toties in ſe ducta, quoties ipſa poteſtas exigit, ut illa in ſe ducatur.* Sic elevare magnitudinem *b* ad *tertiam poteſtatem* eſt invenire *cubum* ipſius magnitudinis *b*. Elevare quantitatem *d* ad *quintam poteſtatem* eſt invenire *quadrato cubum* ipſius *d*, & ſic de ceteris.

Propoſitio I. fundamentalis.

Quadratum magnitudinis binomiæ componitur ex quadrato primi termini, ex duplo ejus, quod fit multiplicando ſecundum per primum, & ex quadrato ſecundi termini.

151. Quadratum quantitatis *binomiæ* $a+b$ eſt $aa+2ab+bb$, ut ex multiplicatione ipſius quantitatis $a+b$ per ſeipſam palam efficitur. Elementa autem hujus quadrati ſunt aa, quadratum primi termini a, $2ab$ duplum producti, quod naſcitur ex mutua ipſorum terminorum a, & b multiplicatione, & bb, quadratum ſecundi termini b.

Propoſitio II. fundamentalis.

Cubus magnitudinis binomiæ componitur ex cubo primi termini, ex triplo ejus, quod producitur multiplicando quadratum primi termini per ſecundum, ex triplo ejus, quod fit multiplicando quadratum ſecundi termini per primum, & ex cubo ſecundi termini.

152. Cubus quantitatis binomiæ $a+b$ eſt $a^3 + 2aab + abb + aab + 2abb + b^3$ ſive, reductis terminis ſimilibus, $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, ut perſpicuum fiet ſi magnitudo $a+b$ in ſuum quadratum $aa+2ab+bb$ ducatur. Hæc autem in cubo $a^3 + 3aab + 3bba + b^3$ elementa habentur, videlicet a^3, cubus primi termini a; $3aab$ triplum producti, quod fit ex ductu quadrati aa primi termini a in ſecundum b; $3abb$ triplum producti, quod oritur multiplicando quadratum bb ſecundi termini b per primum a; & b^3 cubus ſecundi termini b. Igitur &c.

Propoſitio III. fundamentale.

Quadrato-quadratum magnitudinis binomiæ componitur ex quadrato-quadrato primi termini, ex quadruplo ejus, quod fit multiplicando cubum primi termini per ſecundum, ex ſextuplo ejus quod naſcitur multiplicando quadratum primi per quadratum ſecundi, ex quadruplo ejus, quod fit multiplicando cubum ſecundi per primum, & ex quadrato quadrato ſecundi termini.

153. Quadrato-quadratum magnitudinis *binomiæ* $a+b$ eſt $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4b^3a+b^4$, ut patet. Hujus autem elementa ſunt a^4 quadrato-quadratum primi termini a; $4a^3b$ quadruplum producti, quod oritur ex multiplicatione cubi a^3 ejuſdem primi termini a per ſecundum b; $6a^2b^2$ ſextuplum producti ex quadrato primi termini a ducto in quadratum ſecundi termini b; $4b^3a$ quadruplum facti ex multiplicatione cubi b^3 ſecundi termini b per primum a; & b^4 quadrato-quadratum ſecundi termini b.

Corollarium Universale.

154. Cum omnes primi termini magnitudinis pluſquam *binomiæ* conſiderari ac ſumi poſſint inſtar unius, cognitis elementis *ſecundæ*, *tertiæ*, & *quartæ poteſtatis* magnitudinis *binomiæ*, facile erit determinare elementa earundem poteſtatum magnitudinis *polynomiæ*. Sic elementa *ſecundæ poteſtatis* magnitudinis *trinomiæ* $a+b+c$ erunt primo $ae+2ab+bb$, quadratum duorum priorum terminorum, ſive *binomii* $a+b$ conſiderati perinde ac ſi eſſet una indiviſa magnitudo. Secundo productum $2ac+2bc$, duplum ejus, quod efficitur, multiplicando *binomium* $a+b$ per alterum terminum c. Tertio quadratum cc tertii termini c. Idipſum dicito de aliis poteſtatibus ejuſdem magnitudinis *trinomiæ* $a+b+c$, eodemque modo ratiocinare de poteſtatibns magnitudinum, quæ pluribus adhuc partibus conſtant.

S C H O L I O N.

155. De elementis *quintæ*, & *ſextæ* poteſtatis magnitudinum complexarum nullam mentionem facimus, tum quia raro uſu veniunt; tum quia facili negotio ipſa quoque, ſi opus fuerit, determinari poſſunt.

P R O B L E M A I.

Elevatio magnitudinis incomplexæ ad ſuas poteſtates.

Reſolutio.

156. Multiplicetur *exponens* datæ magnitudinis per *exponentem* poteſtatis, ad

ad quam illa elevanda eſt. Productum hinc factum erit *exponens* ipſius magnitudinis ad determinatam poteſtatem evectæ.

Exemplum.

Elevare oporteat magnitudinem a^2 ad *tertiam* poteſtatem. Quoniam igitur hujus poteſtatis *exponens* eſt 3 (§.149.), ductoque *exponente* 2 datæ magnitudinis in *exponentem* 3, efficitur 6, erit a^6 *tertia* poteſtas magnitudinis a^2. Univerſaliter ſi *exponens* magnitudinis datæ, puta *b*, fuerit *n*, & *exponens* poteſtatis, ad quam illa elevanda eſt, fuerit *m*, erit b^{nm} poteſtas quæſita ipſius magnitudinis b^n.

Demonſtratio.

Etenim multiplicando *exponentem* datæ magnitudinis per *exponentem* poteſtatis, magnitudo ipſa toties in ſe ducitur, quoties opus eſt, ut fiat productum gradus quæſiti (§. 150.). Ergo &c.

COROLLARIUM I.

157. Itaque *duplum exponentis datæ magnitudinis incomplexæ eſt exponens ſecundæ poteſtatis, triplum eſt exponens tertiæ poteſtatis, quadruplum eſt exponens quartæ poteſtatis ipſius magnitudinis, atque ita deinceps.* Eſt enim 2 *exponens* ſecundæ poteſtatis, 3 *exponens* tertiæ poteſtatis &c. (§. 149.).

COROLLARIUM II.

158. Hinc, ut magnitudo incomplexa, quæ nullo *exponente* affecta eſt, ad datam poteſtatem elevetur, ſufficit *exponentem* ipſius poteſtatis illi appingere. Nimirum ut magnitudo *a* elevetur ad *tertiam* poteſtatem, ſcribendum eſt a^3.

SCHOLION.

159. Si data magnitudo ſit productum ex diſſimilibus literis inter ſe multiplicatis, ut hujuſmodi magnitudo ad datam poteſtatem elevetur, ſingularum literarum *exponentes* per *exponentem* ipſius poteſtatis multiplicandi ſunt, quæque fiunt producta, iiſdem literis debent appingi. Ut ſi elevare oporteat productum a^2b^3 ad *ſecundam* poteſtatem, ſcribendum eſt a^4b^6. Eſt enim $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$.

PROBLEMA II.

Elevare magnitudinem complexam ad ſecundam poteſtatem.

Reſolutio.

160. I. Prima pars ipſius magnitudinis ad quadratum elevetur (§. 156.). II Hujuſmodi quadrato adiiciatur duplum producti, quod oritur multiplicando primam partem per ſecundam. III Sumatur dein quadratum ſecundæ partis IV. Hæc omnia elementa ſimul in unum colligantur ope ſignorum, quæ ex legibus multiplicationis illis conveniunt. Summa hinc emergens erit *ſecunda* poteſtas quæſita. Si autem magnitudo ſit pluſquam *binomia*, omnes ipſius partes, quæ ſunt ad ſiniſtram, velut una conſiderentur.

Exemplum I.

Elevanda ſit ad *ſecundam* poteſtatem magnitudo *binomia* $a+b$. Fiat ergo quadratum aa primæ partis a. Tum ſumatur duplum producti ex $+a$ in $+b$, ſcilicet $+2ab$ (§. 53.). Deinde quadratum $+bb$ ſecundæ partis b (§. 53.) Summa $aa+2ab+bb$ erit quadratum *binomii* $a+b$.

Exemplum II.

Sit magnitudo *trinomia* $a+b-c$ ad quadratum elevanda. Sumto pro prima parte *binomio* $b+b$, fiat illius quadratum $aa+2ab+bb$ methodo ſuperius tradita. Multiplicato deinde *binomio* $a+b$ per alteram partem $-c$, ſumatur duplum hujus producti, ſcilicet $-2ac-2bc$ (§. 60.); ac demum fiat quadratum $+cc$ ejuſdem partis $-c$ (§. 56.). Aggregatum horum elementorum, eorum ſignis nullatenus mutatis, nempe $aa+2ab+bb-2ac-2bc+cc$, erit *ſecunda* poteſtas *trinomii* $a+b-c$.

Demonſtratio.

Patet ex *propoſitione* I. *fundamentali*.

SCHOLION.

161. Cum eadem ſigna in multiplicatione efficiant + (§. 57.), elementa omnia quadrata, quæ habentur in *ſecunda poteſtate* magnitudinum complexarum, ſemper afficienda ſunt ſigno +.

PRO-

PROBLEMA III.

Elevare magnitudinem complexam ad tertiam poteſtatem.

Reſolutio.

162. I. Sumatur *cubus* primæ partis datæ magnitudinis. II. Deinde *triplum* producti, quod fit multiplicando quadratum ejuſdem partis primæ per ſecundum. III. Poſtea *triplum* producti, quod naſcitur, multiplicando quadratum ſecundæ partis per primam. IV. Poſtremo cubus ejuſdem ſecundæ partis. V. Hiſce elementis in unum collectis ope ſignorum, quæ ſingulis juxta leges multiplicationis convenire dignoſcuntur, quæ inde conſurgit ſumma, erit cubus quæſitus. Si autem magnitudo ſit *polynomia*, partes ſimillimæ habeantur pro una.

Exemplum I.

Eſto magnitudo *binomia* $a - b$, quam ad cubum elevare oporteat. Fiat igitur primo cubus a^3 primæ partis a. Tum multiplicato ejuſdem quadrato $+ aa$ per ſecundam $- b$, nec non quadrato $+ bb$ ſecundæ partis $- b$ per primam $+ a$, ſumatur triplum producti $+ aa \times - b$, ſcilicet $- 3aab$ (§. 54.), ſicuti etiam triplum producti $+ bb \times + a$, nempe $+ 3bba$ (§. 53.); ac demum cubus $- b^3$ ſecundæ partis $- b$, & fiat horum omnium elementorum collectio, manentibus iiſdem ſignis. Erit aggregatum $a^3 - 3aab + 3bba - b^3$ cubus quæſitus.

Exemplum II.

Elevanda ſit ad *tertiam* poteſtatem magnitudo *trinomia* $a + b - c$. Sumto *binomio* $a + b$ pro parte una, elevetur pars iſta ad cubum methodo præcedenti, nempe fiat $a^3 + 3aab + 3bba + b^3$. Quadratum deinde $aa + 2ab + bb$ ejuſdem $a + b$ multiplicetur per ſecundam partem $- c$, factoque producto $- aac - 2abc - bbc$ (§. 60.), ſumatur illius triplum $- 3aac - 6abc - 3bbc$. Ducto ſimiliter quadrato $+ cc$ partis ſecundæ $- c$ in partem primam $a + b$, ſumatur triplum producti $+ acc + bcc$ hinc facti (§. 60), videlicet $+ 3acc + 3bcc$. Ac demum fiat cubus $- c^3$ ſecundæ partis $- c$. Horum omnium collectio $a^3 + 3aab + 3bba + b^3 - 3aac - 6abc - 3bbc + 3acc + 3bcc - c^3$ erit *tertia* poteſtas quæſita *trinomiæ* magnitudinis $a + b - c$.

Demonſtratio.

Hujus reſolutionis demonſtratio manifeſta eſt ex *propoſitione* II. *fundamentali*.

D 4 SCHO-

S C H O L I O N.

163. Cubi ſingularum partium magnitudinis complexæ ad *tertiam* poteſtatem evectæ, iiſdem ſignis afficiuntur, quibus affectæ ſunt ipſæ partes. Enimvero cum earundem partium quadrata affecta ſemper ſint ſigno poſitivo $+$ (§. 161.), eaque multiplicanda ſint per ipſas partes, ut fiant cubi (§. 146.), & ſigna diverſa in multiplicatione reddant $-$ (§. 57.), cubus partis affectæ ſigno $-$, eodem quoque ſigno affici debet, licet illius quadratum ſignum $+$ præfixum habeat.

P R O B L E M A IV.

Elevare magnitudinem complexam ad quartam poteſtatem.

Reſolutio.

164 I. Fiat quadrato quadratum primæ partis. II. Sumatur quadruplum producti, quod oritur multiplicando cubum ejuſdem partis primę per ſecundam. III. Tum ſextuplum producti ex multiplicatione quadrati prioris partis per quadratum poſterioris. IV. Poſtea quadruplum facti ex ductu cubi ſecundæ partis in primam. V. Demum quadrato-quadratum ejuſdem partis ſecundæ. VI. Hiſce omnibus elementis in unum collectis, quin ſigna mutentur, quæ ex legibus multiplicationis illis conveniunt, aggregatum inde conſurgens erit *quarta* poteſtas datæ magnitudinis *binomiæ*. Quod ſi *ploynomia* ipſa fuerit, omnes partes ad ſiniſtram poſitæ, excepta nimirum ultima ad dexteram, pro una habeantur.

Exemplum.

Eſto magnitudo *binomia* $a + b$ ad *quartam* poteſtatem elevanda. Primo igitur fiat quadrato quadratum a^4 partis primæ a; tum multiplicato cubo a^3 ejuſdem partis per ſecundam $+b$, ſumatur quadruplum facti $+a^3b$, nempe $+4a^3b$; deinde ſextuplum facti a^2b^2 ex ductu quadrati $+a^2$ partis prioris in quadratum $+b^2$ partis poſterioris, videlicet $+6a^2b^2$; poſtea quadruplum producti b^3a, quod naſcitur ex multiplicatione cubi $+b^3$ partis ſecundæ $+b$ per primam $+a$, nimirum $+4b^3a$; poſtremo quadrato-quadratum $+b^4$ ejuſdem partis ſecundæ $+b$. Aggregatum ex hiſce omnibus elementis, nempe $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4b^3a + b^4$, erit *quarta* poteſtas magnitudinis *binomiæ* $a + b$.

Demonſtratio.

Deducitur manifeſte ex *propoſitione* III. *fundamentali*.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

165. Omnia elementa quadrato-quadrata, quæ in *quarta* poteſtate magnitudinis complexæ reperiuntur, affecta ſunt ſigno poſitivo +. Fiunt enim ex ductu quadrati, quod eodem ſigno afficitur (§. 161.), in ſeipſum.

PROBLEMA V.

Fractiones ad determinatam poteſtatem elevare.

Reſolutio.

166. Tam numerator, quam denominator datæ fractionis elevetur ad propoſitam poteſtatem, atque ex hiſce productis *reſpective* fiat fractio, quæ erit poteſtas quæſita.

Exemplum.

Elevare oporteat fractionem $\frac{a+b}{d}$ ad quadratum. Sumto igitur quadrato $aa+2ab+bb$ numeratoris $a+b$ pro numeratore, & quadrato dd denominatore, fiat fractio $\frac{aa+2ab+bb}{dd}$. Hæc erit quadratum fractionis datæ $\frac{a+b}{d}$.

Demonſtratio.

Eſt enim fractio $\frac{aa+2ab+bb}{dd}$ factum ex multiplicatione fractionis $\frac{a+b}{d}$ per ſeipſam (§. 111.). Ergo &c.

Analyſis poteſtatum Algebricarum.

DEFINITIO XII.

167. *Analyſis datæ poteſtatis eſt ipſius reſolutio in ſuam radicem*, videlicet *inventio magnitudinis, ex qua aliquoties in ſeipſam ducta poteſtas ipſa efficitur.* Sic inventio magnitudinis $a+b$, ex qua ſemel per ſeipſam multiplicata fit quadratum $aa+2ab+bb$, dicitur *analyſis*, & *extractio* radicis quadratæ ex ipſa magnitudine $aa+2ab+bb$.

D E.

DEFINITIO XIII.

168. *Exponens radicis eſt numerus deſignans gradum poteſtatis, ad quam radix ipſa refertur*. Nimirum ſicuti *exponens* ſecundæ poteſtatis eſt 2, *exponens* tertiæ poteſtatis eſt 3 &c. (§. 149.), ita *exponens* radicis quadratæ eſt 2, radicis cubicæ eſt 3, atque ita deinceps.

HYPOTHESIS.

169. Radices magnitudinum indicantur ſigno $\sqrt{}$, quod *radicale* idcirco dicitur. Gradus vero radicis per *exponentem* poteſtatis, ad quam ipſa radix refertur, radicali ſigno, *exponentis* inſtar, appictum deſignatur. Sic $\sqrt[2]{}$, vel ſimpliciter $\sqrt{}$ exprimit radicem quadratam, $\sqrt[3]{}$ radicem cubicam, $\sqrt[4]{}$ radicem quadrato-quadratam, univerſaliter $\sqrt[m]{}$ radicem illius gradus, quem deſignat *exponens* m. Indicatur itaque radicis extractio præfigendo ſignum radicale ſuo *exponente* affectum illi magnitudini, cui radix extrahenda eſt. Ut ſi extrahere oporteat radicem quadratam ex magnitudine a, ſcribitur $\sqrt{a}$; ſi radicem cubicam, ſcribitur $\sqrt[3]{a}$, & ſic deinceps.

DEFINITIO XIV.

170. Radix cujuſvis gradus dicitur *monomia*, ſi uno tantum termino conſtet, ut a, vel bd &c.: *binomia*, ſi duobus, ut $a+b$, aut $d-e$, *trinomia*, ſi tribus, ut $a+b-c$, univerſaliter *polynomia*, ſi plures terminos contineat.

PROBLEMA VI.

Ex magnitudine Algebrica incomplexa radicem cujuſvis gradus extrahere.

Reſolutio.

171. *Exponens* incomplexæ magnitudinis, cujus radix inquiritur, dividatur per *exponentem* radicis quæſitæ, & *quotus* eidem magnitudini pro *exponente* appingatur. Hæc erit radix quæſita.

Exemplum.

Ut ſi extrahere oporteat radicem cubicam ex magnitudine a^6, cum *exponens* radicis cubicæ ſit 3 (§. 168.), diviſoque *exponente* 6 per *exponentem* 3, *quotus* ſit 2, erit a^2 radix cubica magnitudinis a^6.

De-

Demonſtratio.

Cum enim extractio radicis ſit operatio contraria formationi poteſtatum (§). 167.), quemadmodum magnitudo incomplexa ad datam poteſtatem evehitur, multiplicando ipſius *exponentem* per *exponentem* propoſitæ poteſtatis (§.156.), ita e contrario radix extrahitur ex ipſa eadem magnitudine, ſi illius *exponens* per *exponentem* radicis quæſitæ, qui ab *exponente* poteſtatis, ad quam radix ipſa refertur, diverſus non eſt (§. 168.), dividatur. Ergo &c.

Corollarium.

172. Cum *exponens* radicis quadratæ ſit 2, radicis cubicæ ſit 3. (§. 168.) &c. *radix quadrata datæ magnitudinis incomplexæ erit ipſa eadem magnitudo affecta ſemiſſe ſui exponentis; radix cubica erit ipſa magnitudo affecta triente ſui exponentis; univerſaliter radix datæ cujuſvis magnitudinis incomplexæ erit magnitudo ipſa, cujus exponens ſit fractio habens pro numeratore exponentem ipſius magnitudinis, pro denominatore vero exponentem ipſius radicis.* Radix nimirum quadrata magnitudinis *a* erit $a^{\frac{1}{2}}$, radix cubica $a^{\frac{1}{3}}$, & univerſaliter radix, cujus *exponens* ſit quantitas *m*, magnitudinis a^n erit $a^{\frac{n}{m}}$. Quamobrem extrahere radicem quadratam ex data magnitudine, puta a^n, perinde eſt omnino ac ipſam elevare ad poteſtatem, cujus *exponens* ſit $\frac{n}{2}$: extrahere radicem cubicam idem eſt ac magnitudinem ipſam a^n elevare ad poteſtatem, cujus *exponens* ſit $\frac{n}{3}$, atque ita deinceps.

Scholion I.

173. Loco formulæ $\sqrt[2]{a}$, qua exprimitur radix quadrata magnitudinis *a*, hæc alia $a^{\frac{1}{2}}$ aſſumi poteſt. Similiter loco formulæ $\sqrt[3]{a}$, qua radix cubica ejuſdem magnitudinis *a* indicatur, poteſt hæc alia $a^{\frac{1}{3}}$ aſſumi, & ſic de ceteris. Eſt enim $a^{\frac{1}{2}}$ radix quadrata, & $a^{\frac{1}{3}}$ cubica magnitudinis *a* (§. 172.).

Scholion II.

175. Si quotus *exponentis* datæ magnitudinis per *exponentem* quæſitæ radicis

dicis diviſi, fuerit numerus integer, radix ipſa ex data magnitudine exacte elici poteſt. Si fuerit mixtus ex integro & fracto, radix nequit extrahi niſi ex parte. Si vero fuerit numerus fractus fractione proprie ſumta, data magnitudo eſt hujuſmodi, ut radix ex ipſa nullatenus extrahi queat. Sic ex magnitudine a^4 elici poteſt radix quadrata exacte; quia quotus *exponentis* 4 diviſi per *exponentem* 2 eſt 2. Ex magnitudine vero ipſa a_4 nequit extrahi radix cubica, niſi ex parte; cum ſit $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. At vero ex magnitudine a^2 cubica radix elici nullo modo poteſt, ex eo nimirum, quod diviſo *exponente* 2 per *exponentem* 3, quotus ſit fractio naturalis $\frac{2}{3}$.

S C H O L I O N III.

175. Si data magnitudo incomplexa, ex qua radix extrahenda eſt, fuerit productum ex diſſimilibus literis inter ſe multiplicatis, ſingularum literarum *exponentes* per *exponentem* radicis quæſitæ ſunt dividendi. Ut ſi quæratur radix quadrata magnitudinis a^4b^6, diviſo *exponente* utriuſque literæ per 2, radix quæſita erit a^2b^3.

P R O B L E M A VII.

Radicem quadratam ex magnitudine complexa extrahere

Reſolutio.

176. I. Ex uno, vel altero elementorum quadraticorum datæ magnitudinis eliciatur quadrata radix (§. 171.). II. Per duplum radicis inventæ ea omnia ejuſdem magnitudinis elementa dividantur, in quibus radix ipſa reperitur. III. Quotientes adiiciantur eidem radici ope ſignorum, quæ ſingulis ex ipſo opere diviſionis convenire dignoſcimus. IV. Hujuſmodi aggregatum elevetur ad ſuum quadratum (§. 160.), illudque datæ magnitudini ſubducatur. Si nihil hinc reſiduum fuerit, data magnitudo erit quadratum perfectum, ejuſque radix erit magnitudo illa complexa ad quadratum evecta. Si vero aliquod remaneat, data magnitudo toto illo reſiduo mulctanda eſt, ut fiat quadratum perfectum.

Exemplum.

Extrahenda ſit radix quadrata ex magnitudine $aa - 2ab + bb$. Sumta igitur radice quadrata a ex elemento quadrato aa, per illius duplum, ſcilicet per $+2a$, dividatur elementum $-2ab$, cui illa includitur, & *quotus* $-b$ radici a adiiciatur, fiat nempe $a - b$; cumque nullum aliud elementum

extet

Digitized by Google

extet in ipſa magnitudine, in quo ſit radix a, aggregatum $a - b$ elevetur ad quadratum, illudque datæ magnitudini ſubducatur. Conſtat autem, hinc nihil relinqui. Igitur magnitudo $aa - 2ab + bb$ erit quadratum perfectum, ejuſque radix erit magnitudo *binomia* $a - b$.

Demonſtratio.

Patet ex ipſa geneſi ſecundæ poteſtatis.

PROBLEMA VIII.

Radicem cubicam ex magnitudine complexa extrahere.

177. I. Eliciatur radix cubica ex uno elementorum cubicorum datæ magnitudinis (§. 171.). II. Radix inventa ad quadratum elevetur (§. 156.) III. Per triplum hujus quadrati dividantur omnia ipſius magnitudinis elementa, in quibus reperitur. IV. Quoti cum ſuis ſignis apponantur radici jam inventæ. V. Aggregatum hujuſmodi elevetur ad cubum (§. 162.), iſque datæ magnitudini ſubducatur. Si nihil hinc ſuperſtes fuerit, data magnitudo erit cubus perfectus, ejuſque radix erit aggregatum illud ad cubum evectum. Si vero aliquid remanſerit, toto illo reſiduo magnitudo ipſa mulctanda eſt, ut perfectus cubus evadat.

Exemplum.

Extrahere oporteat radicem cubicam ex magnitudine $a^3 - 3aab + 3bba - b^3$. Igitur ſumta radice cubica a ex elemento cubico a^3, eaque ad quadratum aa evecta, per illius triplum $+ 3aa$ dividatur elementum $- 3aab$, cui includitur, & *quotus* $- b$ radici a adiiciatur. Nullum autem aliud in ipſa magnitudine occurrit elementum, cui illa inexiſtat. Igitur aggregatum $a - b$ ex radice a, & *quoto* $- b$ elevetur ad cubum, iſque datæ magnitudini ſubtrahatur; cumque hinc nihil remaneat (eſt enim cubus *binomii* $a - b$ factum $a^3 - 3aab + 3bba - b^3$, ut patet), data magnitudo erit cubus perfectus, ejuſque radix cubica erit magnitudo $a - b$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex ipſa geneſi tertiæ poteſtatis.

PROBLEMA IX.

Ex magnitudine complexa radicem quadrato-quadratam extrahere.

178. I. Sumatur radix quadrato-quadrata ex uno elemento quadrato-quadrato datæ magnitudinis (§. 171.). II. Radix iſta elevetur ad cubum (§. 156.).

III.

III. Per quadruplum hujus cubi ea omnia ejuſdem magnitudinis elementa dividantur, quibus cubus ipſe inexiſtit. IV. *Quoti* ope ſignorum, quæ illis conveniunt, adiiciantur radici *quadrato quadratæ* jam inventæ. V. Hujuſmodi aggregatum elevetur ad quartam poteſtatem (§.164.), eaque datæ magnitudini ſubducatur. Si nihil hinc reſiduum fuerit, data magnitudo erit *quadrato quadratum* perfectum, ejuſque radix erit illud aggregatum ex radice, & *quotis*. Si vero aliquid ex hac ſubductione remanſerit, magnitudo ipſa toto illo reſiduo mulctari debet, ut ſit *quadrato-quadratum*.

Exemplum.

Eſto magnitudo $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4b_3a + b_4$, ex qua radicem *quadrato-quadratam* extrahere oporteat. Sumta igitur ex elemento *quadrato-quadrato* a^4 radice *quadrato quadrata* a, eaque ad cubum $+ a_3$ evecta, per ipſius quadruplum $+ 4a_3$ dividatur elementum $+ 4a^3b$, in quo reperitur, atque hujuſce diviſionis *quotiens* $+ b$ radici a adiiciatur. *Binomium* $a + b$ elevetur ad quartam poteſtatem, eaque ſubducatur magnitudini datæ. Cum igitur hinc nihil remaneat, data ipſa magnitudo erit *quadrato quadratum* perfectum, ejuſque radix erit *binomium* $a + b$.

Demonſtratio.

Manifeſte colligitur ex ipſa geneſi quartæ poteſtatis.

COROLLARIUM UNIVERSALE.

179. Si, quæ hactenus dicta ſunt, attento animo expendantur, perſpecta habebitur generalis methodus extrahendi quamcumque radicem ex complexa magnitudine. Conſtabit enim, totum artificium in eo conſiſtere. I. *ut ſumatur radix quæſita ex uno, vel altero elementorum datæ magnitudinis, quod ſit poteſtas illius gradus, cujus eſt radix quæſita*, videlicet ſumatur radix quadrata ex elemento quadrato, ſi res ſit de radice quadrata: radix cubica ex uno elemento cubico, ſi de hac ſit ſermo, atque ita deinceps. II. *ut radix hujuſmodi elevetur ad poteſtatem uno gradu minorem illa, quam elementum, cui extracta eſt, oſtendit*, nimirum ad quadratum, ſi extrahenda ſit radix cubica; ad cubum, ſi extrahenda ſit radix quadrato quadrata &c. III. *ut hujuſmodi poteſtas toties ſumatur, quot unitates numerat exponens elementi, cui radix ad hanc poteſtatem evecta, extracta eſt*, nempe ſumatur *duplum* illius, ſi agatur de extractione radicis quadratæ; *triplum*, ſi de extractione radicis cubicæ &c. IV. *ut per hoc productum tali coefficiente affectum dividantur ea omnia elementa datæ magnitudinis, quibus diviſorem ipſum ineſſe conſpicimus, habita ratione ſignorum, quibus ſingula affecta ſunt*. V. *ut omnes quoti adiiciantur radici primo inventæ ope illorum ſignorum, quæ ex ipſo diviſionis opere ſingulis conveniunt*. Hoc ſiquidem aggregatum erit radix quæſita.

SCHO-

SCHOLION I.

180. Si operationes hactenus traditæ pro radice ex complexa magnitudine extrahenda, executioni mandari nequeant, id argumento eſt, ex data magnitudine radicem ipſam extrahi minime poſſe. Quamobrem radix ipſa indicari debet ope ſigni radicalis $\surd$, ipſum ſcilicet cum ſuo *exponente* magnitudini, cui radix extrahenda eſt, præfigendo; vel neglecto ſigno radicali, *exponentes* integri ſingulorum elementorum datæ magnitudinis mutandi ſunt in fractiones, quarum numerator ſit eorundem *exponens* poteſtatis, ad quam quæſita radix refertur, videlicet loco formulæ $\surd\overline{a+b}$, qua indicatur radix quadrata magnitudinis $a+b$, ſcribi poteſt $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}}$, quemadmodum, loquendo de radice magnitudinum ſimplicium, ſuperiori loco innuimus (§. 173.).

SCHOLION II.

181. Porro ſi cum viro Cl. Nicolao de Martino (a), *poteſtatis* nomine ea omnis magnitudo intelligatur, quæ *exponente* aliquo affecta eſt, duo poteſtatum genera, habita ratione *exponentium*, diſtingui poſſunt, poteſtates nimirum *perfectæ*, & poteſtates *imperfectæ*. Poteſtates *perfectæ* erunt illæ, quarum *exponentes* ſunt numeri integri, ut a^2, b^3, & hujuſmodi. *Imperfectæ* vero illæ, quarum *exponentes* ſunt numeri fracti, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, & hiſce ſimiles.

PROBLEMA X.

Radicem cujuſvis gradus ex fractionibus extrahere.

Reſolutio.

182. Tam ex numeratore, quam ex denominatore datæ fractionis, methodo ſuperius tradita, radix propoſiti gradus extrahatur; atque ex inventis radicibus *reſpective* fiat fractio, quæ erit radix quæſita.

Exemplum.

Sic radix quadrata fractionis $\frac{aa-2ab+bb}{dd}$ erit fractio $\frac{a-b}{d}$, cujus numerator $a-b$ eſt radix quadrata numeratoris $aa-2ab+bb$, & denominator d eſt radix quadrata denominatoris dd, ut patet.

De-

(a) *Elem Algebræ* Lib. I. cap. 6.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Conſtat enim, eſſe $\frac{a-b}{d} \times \frac{a-b}{d} = \frac{aa-2ab+bb}{dd}$ (§. 121.) Ergo &c.

APPENDIX.

De extractione radicis quadratæ, & cubicæ ex quantitate numerica.

DEFINITIO I.

183. *Numerus quadratus vocatur ille, qui oritur ex dato numero ducto in ſeipſum.* Hujuſmodi eſt numerus 16, cum fiat ex numero 4 per ſeipſum multiplicato.

DEFINITIO II.

184. *Radix quadrata dati numeri eſt numerus, ex quo per ſeipſum multiplicato datus ipſe numerus efficitur.* Sic numerus 4 eſt radix quadrata numeri 16.

DEFINITIO III.

185. *Numerus cubicus is eſt, qui fit ex numero quadrato multiplicato per ſuam radicem.* Talis eſt numerus 64, utpote conſurgens ex multiplicatione numeri quadrati 16. per ſuam radicem 4.

DEFINITIO IV.

187. *Radix cubica dati numeri eſt numerus, qui ductus in unum quadratum efficit ipſum datum numerum.* Sic numerus 4 eſt radix cubica numeri 64, cum ſit $4 \times 16 = 64$.

COROLLARIUM.

186. Cum eſt unitate, quotieſcunque in ſeipſam ducatur, unitas ſemper prodeat, *unitas eſt ſimul radix, & poteſtas cujuſvis gradus ſui ipſius,* quemadmodum ipſa ſimul numerus eſt, & principium numeri.

La-

Laterculum.

In quo omnium digitorum numeri quadrati, & cubici exhibentur.

188. Quoniam pro extrahenda radice quadrata, & cubica ex quantitate numerica opus eſt, ut omnium digitorum numeri quadrati, & cubici cognoſcantur, eos omnes hic ſubiiciendos cenſui.

Radices.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quadrati.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Cubi.

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Propoſitio I. fundamentalis.

Numerus quadratus una, vel duabus notis numericis conſtans habet radicem unius notæ: duarum, qui tres, vel quatuor notas continet: trium, qui aut quinque, vel ſex notas comprehendit, & ſic deinceps.

189. Patet inductione. Conſtat enim ex ſuperiori laterculo, numerum quadratum maximi digiti 9 continere duas notas; unam vero dumtaxat numeros quadratos digitorum 1. 2. 3. Conſtat etiam, numerum quadratum radicis 10 tres notas comprehendere; quatuor autem quadratum numeri maximi duarum notarum, ſcilicet 99. Enimvero numerus quadratus primi eſt 100, ſecundi vero eſt 9801, atque ita de ceteris.

Propoſitio II. fundamentalis.

Numerus cubicus una, duabus, vel tribus notis compoſitus habet radicem unius notæ; duarum, qui quatuor, quinque, aut ſex notas continet; trium, qui ſeptem, octo, vel novem notas complectitur, & ſic deinceps.

190. Hæc itidem propoſitio inductione manifeſta eſt, ut de præcedenti diximus.

PROBLEMA I.

Ex numero integro radicem quadratam extrahere.

191. Extrahenda ſit *radix quadrata* ex numero 186624.

Reſolutio.

I. Dividatur numerus ipſe in claſſes, initio dextrorſum facto, quarum quælibet binas notas contineat, ut hic patet 18, 66, 24, ultima tamen ad ſiniſtram excepta, quæ ſive unam, ſive duas notas contineat, perinde eſt. Quot igitur erunt claſſes, tot notas quæſita radix comprehendet (§.189.) II. Sumatur *radix quadrata* ope ſuperioris laterculi ex prima claſſe 18 ad ſiniſtram; quia vero numerus 18 non eſt quadratus, ſpectetur numerus quadratus ipſo numero 18 proxime minor, ſcilicet 16, ejuſque *radix quadrata* 4 ſcribatur poſt lunulam. Eſt enim prima nota radicis quæſitæ, ſumendo pro prima, quæ ad ſiniſtram primo occurrit. *Hæc porro operatio ſingularis eſt, ita nimirum ut non ſit iteranda*. III. Quadratus 16 notæ radicalis 4. ſubducatur ipſi membro 18, & reſiduum 2 infra illud pro more ſcribatur. IV. Reſiduo 2 appingatur claſſis proxime ſequens 66, ita ut fiat 266, cujus ultima nota 6. neglecta, quod relinquitur 26, dividatur per duplum notæ radicalis hactenus inventæ 4, ſcilicet per 8, & *quotus* 3 hujus diviſionis appingatur notæ priori 4, ut fiat 43. Eſt enim *quotus* 3 altera nota radicis quæſitæ. V. *Quoto* 3 appicto diviſori 8, ita ut emergat 83, multiplicetur numerus ipſe 83 per eundem *quotum* 3, & productum 249 hinc factum ſubtrahatur integræ ſummæ 266, reſiduum vero 17. infra illam ſcribatur. *Hæ duæ poſtremæ operationes, nimirum IV., & V., in omnibus membris, quæ ſequuntur, repetendæ ſunt, quotcunque ipſa fuerint*. V. Reſiduo 17. adiiciatur altera claſſis 24, nempe fiat 1724, cujus ultima nota 4 neglecta, quod remanet 171, dividatur per duplum ſummæ radicalis 43 hactenus inventæ, videlicet per 86, & *quotus* 2. erit ultima nota radicis quæſitæ, ac proinde reliquis 43 adiicienda eſt, ita ut fiat 432. VII. *Quotus* 2 adiiciatur diviſori 86, & aggregatum 862 multiplicetur per eundem *quotum* 2; quodque hinc ſit productum 1724., auferatur ex tota ſumma 1724, ut ſupra. Cum igitur hinc nihil remaneat, numerus ipſe 186624 erit quadratus perfectus, ejuſque radix erit 432, quam invenire oportebat.

```
18, 6 6, 2 4.        ( 4 3 2.
16.
——
 2 6, 6
 2 4 9
———————
   1 7 2. 4.
```

Examen.

Ut autem palam fiat, an radix inventa ſit vera *radix quadrata* dati numeri, multiplicetur per ſeipſam, & productum ex numero data auferatur. Si namque hinc nihil remaneat, ut contingit poſt ultimam ſubductionem in extractione radicis modo tradita, operatio legitime peracta eſt, ipſaque radix inventa eſt radix quæſita. Sic numerus 432 eſt *radix quadrata* numeri 186624, cum ſit $432 \times 432 = 186624$. Radix vero inventa non eſt vera radix, ſi res ſecus contingat.

Demonſtratio.

Videatur apud virum eximium P. Andrea Tacquetum lib. III. *Arithmeticæ practicæ* cap. 2. Nimis enim prolixa eſt, quam ut in hac ſynopſi exhiberi poſſit.

S C H O L I O N I.

192. Si facta ultima ſubductione, aliquod ſuperſit, datus numerus non erit quadratus, ſed toto illo reſiduo mulctandus eſt, ut quadratus perfectus evadat. Sic numerus 187154 non eſt quadratus; nam inventa radice 432, factaque ſubductione producti 1724 ex reſiduo 2254, relinquitur 530. In examine propterea radicis 432 reſiduum ipſum 530 adiiciendum eſt producto quadrato 186624, ut datus numerus emergat.

S C H O L I O N II.

193. Quoniam vero non omnis integer numerus, cujus *radix quadrata* inquiritur, quadratus eſt, & numerus carens radice integra, careat etiam fracta (a), ſufficit tunc, ut ex hujuſmodi numero talis radix extrahatur, quæ ad veram, quo magis fieri poteſt, accedat. Obſervandum idcirco eſt, radicem compoſitam ex integro numero radicali invento, & ex fractione, cujus numerator ſit numerus, qui, radice extracta, relinquitur, denominator vero duplum radicis jam inventæ, eſſe majorem vera; illam autem eſſe vera minorem, quæ conſtat ex numero radicali integro, & ex fractione, cujus numerator ſit numerus ille reſiduus, & denominator duplum numeri radicalis cum unitate ſibi adjecta. Ut ſi *radix quadrata* numeri *a* ſit integer numerus *b*, & reſiduum *d*, *radix quadrata* ipſius *a* major vera erit $b+\frac{d}{2b}$; radix vero minor vera erit $b+\frac{d}{2b+1}$ (b). Pro determinanda idcirco *radice quadrata*, quæ ſit veræ proximior, ratio habenda eſt non ſolum numeri radi-

(a) De-Chales lib. III. *Arithmeticæ* prop. 1. (b) De-Chales ibidem prop. 8., & 9. §. Volfius *Elem. Arith.* §. 293.

dicalis jam reperti, verum etiam numeri, qui, facta ultima ſubductione, relinquitur. Si namque numerus ille reſiduus major fuerit radice, aut illi æqualis, radix, quæ a vera deficit, exactior erit. Si autem fuerit minor, radix illa erit veræ proximior, quæ veram excedit. Sic *radix quadrata* exactior numeri 187154 erit $432 + \frac{530}{865}$; cum numerus reſiduus 530 ſuperet numerum radicalem 432. At vero *radix quadrata* exactior numeri 186635 $432 + \frac{11}{864}$, propterea quod reſiduus numerus 11 deficiat a radice 432.

PROBLEMA II.

Ex numero integro radicem cubicam extrahere.

194. Ex integro numero 12487168 *cubicam* radicem extrahere oporteat.

Reſolutio.

I. Datus numerus diſtribuatur in claſſes, initio dextrorſum facto, ita ut quælibet tres notas contineat, ultima ad ſiniſtram excepta, quæ duabus, vel etiam una dumtaxat nota conſtare poteſt, ut hic patet 12, 487, 167. Quot enim erunt claſſes, tot erunt notæ in *radice cubica* quæſita (§. 190.), ac proinde tribus tantummodo notis conſtabit *radix cubica* numeri dati 12487158, propterea quod nempe in tres tantum claſſes numerus ipſe diſtribui poſſit. II. Ex prima claſſe ad ſiniſtram, videlicet ex numero 12 eliciatur *radix cubica*, ope laterculi ſuperius poſiti; & quia numerus ille cubicus non eſt, ſpectetur cubus illo proxime minor, nempe 8, cujus *radix cubica* 2 erit prima nota radicis quæſitæ, initio ſiniſtrorſum facto, eaque proinde poſt lunulam ſcribatur. III. Cubus ipſe 8 auferatur ex membro 12, & reſiduum 4 infra illud collocetur, eique claſſis proxime ſequens 487 adiiciatur, ut hic patet.

```
1 2, 4 8 7, 168.          ( 23.
  8
 ---
  4  4 8, 7
```

Hæc autem operatio, extractio nimirum *cudicis cubicæ*, peculiaris eſt primo membro ad ſiniſtram, ita ut in ſequentibus locum non habeat. IV. Quadratum 4 notæ radicalis 2 ter ſumatur, & fiat, 12, cui adiiciatur triplum ipſius radicis 2, nempe 6, ut in hac formula.

```
1 2.
  6.
-----
1 2 6.
```

Tum

Tum neglecta ultima nota 7 ſummæ 4487, reſiduum 448 dividatur per 126. Cumque hujus diviſionis quotiens ſit 3, is erit altera nota radicis quæſitæ, atque adeo priori jam inventæ 2 ad dexteram adiiciatur. V. Hæc nota radicalis 3 multiplicet 12 triplum ſcilicet quadrati 4. notæ prioris 2, & efficiat 36. Quadratum 9. ejuſdem notæ poſterioris 3 ducatur in 6 triplum notæ radicalis 2, & fiat 54. Ipſa quoque nota 3 elevetur ad ſuum cubum 27. Tum hæc omnia producta diſponantur, ut hic patet

3 6.
5 4.
2 7
4 1 6 7.

quæque hinc emergit ſumma 4167 auferatur ex toto membro 4487, & reſiduum 320 illi ſubſcribatur. VI. Reſiduo 320.

4 4 8 7.
4 1 6 7.
3 2 0 1 6, 8

adiiciatur altera claſſis 168, & fiat ſumma 320168, cujus ultima nota 8 neglecta, reſiduum 32016 dividatur per ſummam 15939, quæ conſurgit ex numero 1587, nempe triplo quadrati 529. radicis hactenus inventæ 23, ex numero 69, triplo ſcilicet ipſius radicis 23, ut in hac formula diſpoſitis

1 5 8 7. (2 3 2.
6 9
1 5 9 3 9

& quotus 2. hujus diviſionis erit poſtrema nota radicis quæſitæ, eaque propterea poſt lunulam ſcribatur, ita ut tota *radix cubica* ſit 232. VII. Nota radicalis 2 modo inventa multiplicet 1587 triplum quadrati radicis 23, & efficiat productum 3174. Triplum ejuſdem radicis 23, ſcilicet 69 ducatur in 4, quadratum nempe notæ radicalis 2 ultimo repertæ, & fiat 276, ipſaque nota radicalis 2 elevetur ad ſuum cubum 8. Tum hæc tria producta, ut in hac formula, collocentur

3 1 7 4.
2 7 6.
8
3 2 0 1 6 8.

quæque hinc oritur ſumma, ex toto membro 320168 ſubducatur; & quoniam hinc nihil ſupereſt, datus ipſe numerus erit cubus perfectus, ejuſque *radix cubica* erit 232, quæ fuerat quæſita. Porro operationes V., & VI. in omnibus membris, quæ ſequuntur, repetendæ ſunt, quotcunqe illa fuerint.

Examen.

Radix inventa elevetur ad ſuum quadratum, iſque multiplicetur per ipſam radicem. Si radix legitime extracta fuerit, quod hinc oritur productum, erit numerus ipſe datus. Sic numerus 232 eſt *radix cubica* dati numeri 12487168, cum jam ſit $232 \times 232 = 53824$, & $53824 \times 232 = 12487168$.

Demonſtratio.

Luculenter traditur a P. Tacqueto lib. III. *Arithmeticæ practicæ* cap. 4, apud quem videatur.

S C H O L I O N I.

195. Si poſt ultimam ſubductionem numerus aliquis ſuperſit, datus numerus non erit cubus perfectus, ſed toto illo exceſſu perfectum cubum excedit. Hujuſmodi porro exceſſus adjungi debet numero cubico radicis inventæ, ut palam fiat, an radix quæſita, quemadmodum diximus de radice *quadrata*, legitime extracta fuerit.

S C H O L I O N II.

196. Ut autem numeri non cubici, puta 12487268, *radix cubica* exactior, quo fieri poteſt, extrahatur, radix inventa 232 elevetur ad quadratum 53824, cui adiiciatur ipſa radix 232, & fiat ſumma 54056. Hæc ſumma multiplicetur per 3, & producto hinc facto 162168 addatur unitas. Tum ex numero 100, qui relinquitur, extracta radice 232, veluti numeratore, & ex ſumma 162168+1, ſeu 162169, veluti denominatore, fiat fractio $\frac{100}{162169}$, quæ adiiciatur radici inventæ 232. Aggregatum $232 + \frac{100}{162169}$ erit radix *cubica* numeri non cubici 12487268 veræ proximior (a).

P R O B L E M A III.

Ex numero fracto radicem quadratam, & cubicam extrahere.

Reſolutio.

197. Extrahatur radix quæſita tam ex numeratore, quam ex denominatore datæ fractionis, atque ex ipſis radicibus fractio conſtituatur, quæ erit radix quæſita.

Exem-

(a) Videatur P. De Chales lib. II. *Arith.* prop. 24

Digitized by Google

Exemplum.

Sic radix *quadrata* fracti numeri $\frac{9}{25}$ erit fractio $\frac{3}{5}$, cujus numerator 3 eſt radix *quadrata* numeratoris 9, & denominator 5 eſt ipſa eadem radix denominatoris 25. Fractio ſimiliter $\frac{2}{3}$ erit radix *cubica* fractionis $\frac{8}{27}$. Eſt enim numerator 2 radix *cubica* numeratoris 8, & denominator 3. denominatoris 27.

Demonſtratio.

Patet ex ipſa multiplicatione radicis per ſeipſam, & per ſuum quadratum.

S C H O L I O N.

198. Si termini datæ fractionis hujuſmodi non fuerint, ut quæſita radix ex ipſis extrahi poſſit, fractio ipſa ad minimos terminos revocanda eſt. Plerumque enim accidit, ut minimi termini ſint poteſtas perfecta illius gradus, ad quam radix ipſa refertur. Profecto quadrati non ſunt termini fractionis $\frac{12}{27}$. Si tamen fractio ad minimos terminos revocetur, fit fractio ejuſdem valoris, cujus termini ſunt numeri quadrati, nimirum fractio $\frac{4}{9}$, cujus radix *quadrata* eſt fractio $\frac{2}{3}$. Termini ſimiliter fractionis $\frac{24}{81}$ non ſunt cubici, cujuſmodi tamen ſunt termini fractionis $\frac{8}{27}$, quæ eſt ipſa fractio $\frac{24}{81}$ ad minimos terminos reducta.

SECTIO OCTAVA.

Calculus quantitatum radicalium.

DEFINITIO I.

199. *Quantitates* radicales, *ſive* irrationales *dicuntur illæ, quæ vulgaribus numeris exprimi nequeunt, quatenus nulla aſſignari poteſt pars, quæ eas omnes adæquate metiatur*. Talis eſt radix *quadrata* numeri 8. Hæc enim nullo modo numero exprimi poteſt, propterea quod nempe nulla ſit pars communis numero 8, ejuſque radici *quadratæ*. Id genus ergo

ſunt in Algebra omnes illæ magnitudines, quæ exprimuntur præfigendo illis ſignum radicale $\sqrt{\ }$, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt[m]{ab+dx}$, &c. quæque *poteſtates imperfectæ* vocantur. Hæ porro vel *reales* ſunt, vel *imaginariæ*, ſeu *repugnantes*.

DEFINITIO II.

200. *Quantitates radicales reales ſunt illæ, quæ licet numeris exprimi nequeant, lineis tamen deſignari poſſunt.* Hujuſmodi eſt radix *quadrata* numeri 8, ſi ad radicem *quadratam* numeri 4 referatur. Quandoquidem radix illa poteſt linea deſignari; cum unicuique conſtet, quadratum unius lineæ poſſe eſſe duplum alterius, quamvis in numeris id haudquaquam contingat.

DEFINITIO III.

201. *Quantitates radicales imaginariæ ſunt illæ, quæ neque lineis, neque numeris poſſunt exprimi.* Talis eſt radix *quadrata* magnitudinis $-a$. Enimvero cum $+$ per $+$ efficiat $+$ (§. 53.), ſicuti etiam $-$ per $-$ (§. 56.), repugnat quantitas, quæ ducta in ſeipſam producat quantitatem $-a$. Etenim hujuſmodi quantitas neque poſitiva eſſe poteſt, neque negativa,

DEFINITIO IV.

202. *Quantitates radicales vocantur ejuſdem nominis, cum in illis omnibus idem eſt exponens ſigni radicalis; diverſi nominis vero, cum earum exponentes ſunt diverſi.* Sic ejuſdem nominis ſunt quantitates *radicales* $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[2]{de}$, quia idem eſt utriuſque *exponens* 2. Contra vero diverſi nominis quantitates *radicales* $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[3]{de}$.

COROLLARIUM.

203. Cum quantitates *radicales* ſpectari poſſint veluti poteſtates imperfectæ, *illæ quantitates radicales erunt ejuſdem nominis, quarum exponentes ſunt fractiones ejuſdem denominationis. Illæ vero erunt diverſi nominis, quarum exponentes ſunt fractiones diſſimiles.* Ejuſdem nempe nominis ſunt quantitates *radicales*, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, & univerſaliter $a^{\frac{1}{m}}$, $b^{\frac{r}{m}}$; diverſi vero nominis quantitates *radicales* $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, & univerſaliter $a^{\frac{n}{m}}$, $b^{\frac{s}{r}}$.

HYPOTHESIS I.

204. *Coefficientes* quantitatum *radicalium* ſigno radicali præfiguntur, ita ni-

nimirum ut $3\sqrt{a}$ idem ſit ac $\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}$, $4\sqrt[3]{ad}$ idem omnino ac $\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}+\sqrt[3]{ad}$. Univerſaliter $a\sqrt{de}$ exprimit quantitatem *radicalem* $\sqrt{de}$ toties ſumendam eſſe, quot unitates in quantitate a numerantur.

Propoſitio fundamentalis.

Si duæ poteſtates ejuſdem gradus inter ſe multiplicentur, productum hinc emergens erit poteſtas ejuſdem gradus illius magnitudinis, quæ ex illarum radicibus inter ſe multiplicatis conſurgit.

205. Ut ſi radix a quadrati aa multiplicetur per radicem b quadrati bb, factum ab erit radix *quadrata* producti $aabb$, quod efficitur multiplicando quadratum aa per quadratum bb. Similiter ſi cubus a^3 multiplicetur per cubum b^3, factum ex radice a cubi a^3 ducta in radicem b cubi b^3, ſcilicet ab, erit radix *cubica* producti $\overline{ab}^3$. Idipſum dicito de aliis quibuſcunque poteſtatibus.

Demonſtratio.

Conſtat enim, *quadratum* producti ab eſſe $abab$, ſive $aabb$, ejuſdem vero cubum eſſe $\overline{ab}^3$ (§ 145. 146.). Ergo &c.

PROBLEMA I.

Quantitates irrationales ad ſimpliciorem expreſſionem reducere.

Reſolutio.

206. Extrahatur radix a ſigno radicali denominata ex illa parte datæ magnitudinis, ex qua poteſt extrahi, ipſaque radix ante ſignum radicale, quæ vero ſupereſt, quantitas poſt ipſum ſignum collocetur.

Exemplum.

Eſto magnitudo radicalis $\sqrt{aadm}$ ad ſimpliciorem expreſſionem reducenda. Quoniam igitur radix *quadrata* denominata a ſigno radicali $\sqrt[2]{\ }$ elici poteſt ex parte aa ipſius magnitudinis, hæc ex illa extrahatur. Radix ipſa a ponatur ante ſignum, poſt illud vero quantitas reſidua dm, nempe fiat $a\sqrt[2]{dm}$. Erit $a\sqrt[2]{dm} = \sqrt[2]{aadm}$.

De-

Demonſtratio.

Cum enim *aadm* ſit factum ex ductu quadrati *aa* in quantitatem *dm*, ſi quantitas *p* ponatur radix quadrata magnitudinis *dm*, erit *ap* radix quadrata totius producti *aadm* (§. 205.). Eſt autem $a\sqrt[2]{dm} = ap$ (§. 205.). Ergo erit $a\sqrt[2]{dm} = \sqrt[2]{aadm}$.

S C H O L I O N I.

207. Ut palam fiat, an reductio quantitatis radicalis propoſitæ ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem legitime peracta fuerit, quantitas ante ſignum poſita ad eam dignitatem elevetur, quam ſignum ipſum denominat, ipſaque poteſtas in eam quantitatem ducatur, quæ ſub ſigno reperitur. Si enim, quod hinc fit, fuerit quantitas radicalis data, optime peracta erit reductio. Secus vero, ſi hujuſmodi productum fuerit ab ipſa quantitate diverſum. Sic magnitudo radicalis $\sqrt{aadm}$ ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem redacta dat $a\sqrt{dm}$; quia, ſi quadratum *aa* quantitatis *a* ante ſignum poſitæ multiplicetur per *dm*, quæ ſub ſigno exiſtit, habetur $\sqrt{aadm}$.

S C H O L I O N II.

208. Si facta reductione plurium quantitatum radicalium ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem, eadem quantitas ſub ſigno radicali remaneat, quantitates ipſæ radicales dicuntur *communicantes*, ſuntque *directe* inter ſe, ut quantitates, quæ extra ſignum reperiuntur. *Communicantes* nimirum ſunt quantitates radicales $\sqrt{aab}$, $\sqrt{ddb}$; cum facta reductione, habeatur $a\sqrt{b} = \sqrt{aab}$, $d\sqrt{b} = ddb$, eſtque radicalis $\sqrt{aab}$ ad radicalem $\sqrt{ddb}$, ut *a* ad *d*.

S C H O L I O N III.

209. Ut innoteſcat, num quantitas radicalis complexa ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poſſit, quantitatem ſcilicet contineat, ex qua extrahi queat radix a ſigno denominata, omnes illius diviſores inquirendi ſunt (§. 91.) Si enim horum aliquis fuerit poteſtas, quam radicale ſignum denominat, data magnitudo ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poterit. Secus vero, ſi nullus illorum fuerit dignitas ab *exponente* ſigni radicalis denominata. Ut ſi ad ſimpliciorem expreſſionem reducenda ſit quantitas radicalis $\sqrt{a^3 + 3aab + 3bba + b^3}$, cum $aa + 2ab + bb$ ſit unus ex diviſoribus datæ ipſius quantitatis, atque ex ipſo $aa + 2ab + bb$ ſumi queat radix a ſigno $\sqrt{}$ indicata, nempe $a + b$, erit $\overline{a+b}\sqrt{\overline{a+b}}$ quantitas ipſa $\sqrt{a^3 + 3aab + 3bba + b^3}$ ad ſimpliciorem expreſſionem reducta.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Quantitates irrationales diverſi nominis ad eandem denominationem revocare.

Reſolutio.

210. Spectentur quantitates ipſæ irrationales ſub formula poteſtatum imperfectarum, earumque proinde *exponentes* fractionarii ad idem nomen reducantur (§. 116.): qua reductione facta, quantitates ipſæ iterum ponantur ſub ſignis radicalibus, ea quidem lege, ut *exponens* ſignorum ſit communis ipſarum fractionum denominaror, *exponentes* vero ipſarum quantitatum ſint earundem fractionum numeratores.

Exemplum.

Reducere oporteat ad idem nomen magnitudines radicales $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$. Quoniam igitur $\sqrt[2]{a}$ idem eſt ac $a^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[3]{b}$ idem ac $b^{\frac{1}{3}}$ (§. 173.), fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, fiant nempe fractiones $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$. Erunt $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{b^2}$ quantitates ipſæ $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem revocatæ.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$, & $b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{6}}$ ob ſimilitudinem ſcilicet fractionum $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$, nec non fractionum $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, erit $\sqrt[2]{a} = \sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b^2}$.

ANIMADVERSIO.

211. Si quantitates radicales ad eandem denominationem revocandæ, fuerint producta ex diſſimilibus literis inter ſe multiplicatis, diverſoque *exponente* affectis, cujuſmodi ſunt radicales $\sqrt[4]{a^2 d^3}$, $\sqrt[3]{b^2 m}$, ſingula ipſarum elementa ad eandem denominationem revocari debent. Videlicet ut ad idem nomen reducantur radicales propoſitæ, conſideranda eſt radicalis $\sqrt[4]{a^2 d^3}$ ſub formula $a^{\frac{2}{4}} d^{\frac{3}{4}}$, & radicalis $\sqrt[3]{b^2 m}$ ſub formula $b^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}}$. Reductis ergo ad idem nomen

nomen *exponentibus* fractionariis, ita nimirum ut fiat $\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$, $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$, habebitur $\sqrt[12]{a^6d^9}=\sqrt[4]{a^2d^3}$, & $\sqrt[12]{b^8m^4}=\sqrt[3]{b^2m}$.

Calculus radicalium ſimplicium.

DEFINITIO V.

212. *Quantitates radicales dicuntur* ſimplices, *ſive* incomplexæ, *item* monomiæ, *cum unus tantum eſt earum terminus ſigno radicali affectus*, ut $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$ &c.

PROBLEMA III.

Quantitates irrationales ſimplices ſimul addere.

Reſolutio.

113. Reducantur ad ſimpliciorem expreſſionem (§. 206.), ſique *communicantes* fuerint, collectis in unum, quæ ſunt ante ſignum, ſumma quantitati ſub ſigno poſitæ, veluti illius *coefficiens* præfigatur. Si vero communicantes non fuerint, fiat earum collectio ope ſigni +, proinde ac ſi eſſent rationales.

Exemplum.

Ut ſi magnitudo radicalis $\sqrt{bbd}$ adiicienda ſit radicali $\sqrt{aad}$, cum facta reductione, habeatur $\sqrt{aad}=a\sqrt{d}$, & $\sqrt{bbd}=b\sqrt{d}$, ſumma erit $\overline{a+b}\sqrt{d}$. Summa quoque ex radicali $\sqrt{bbd}$ adiecta radicali $\sqrt{aae}$ erit $a\sqrt{e}+b\sqrt{d}$.

Demonſtratio.

Cum enim, facta reductione, quantitates ante ſignum poſitæ ſint *coefficientes* earum, quæ ſub ſigno reperiuntur (§. 204.), facta *coefficientium* ſumma, hæc quantitati ſub ſigno poſitæ præfigi debet, ſi fuerint *communicantes*; quemadmodum diximus §. 18. de additione rationalium ſimilium, quæ *coefficientibus* ſunt affectæ. Si autem *communicantes* non fuerint, tractari debent, ut rationales diſſimiles, quæ *coefficientibus* itidem ſunt affectæ; adeoque &c

PRO-

PROBLEMA IV.

Quantitatem irrationalem ſimplicem alteri ſubtrahere.

Reſolutio.

214. Facta illarum reductione ad ſimpliciorem expreſſionem, ſi fuerint *communicantes*, quantitas ante ſignum radicalis ſubtrahendæ ſubducatur quantitati, quæ itidem ante ſignum quantitatis habetur, cui fieri debet ſubtractio, & reſiduum eidem quantitati ſub ſigno poſitæ præfigatur. Si vero *communicantes* non fuerint, fiat ſubtractio ope ſigni —, perinde ac ſi eſſent rationales.

Exemplum.

Ut ſi ſubtrahenda ſit radicalis $\sqrt{bbd}$ radicali $\sqrt{aad}$, facta reductione, ſcribendum eſt pro reſiduo $\overline{a - b}\sqrt{d}$. Si autem fieri debeat ſubtractio quantitatis $\sqrt{bbd}$ quantitati $\sqrt{aae}$, ſcribendum eſt $a\sqrt{e} - b\sqrt{d}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex dictis §. 28. de ſubtractione magnitudinum rationalium quæ *coefficientibus* affectæ ſunt, loquendo de radicalibus *communicantibus*. Si autem de radicalibus non *communicantibus* loquamur, patet ex ipſa natura ſigni —, quo ſimul junguntur.

PROBLEMA V.

Quantitates irrationales ſimplices multiplicare.

Reſolutio.

215. Si fuerint diverſæ denominationis, revocentur ad eandem (§. 210.) Tum facta multiplicatione quantitatum, quæ ſub ſigno radicali habentur, perinde ac ſi eſſent rationales, producto præfigatur ſignum radicale cum ſuo *exponente*.

Exemplum.

Factum nempe ex radicali $\sqrt{a}$ multiplicata per radicalem $\sqrt{b}$ erit $\sqrt{ab}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 205.

Anu

Digitized by Google

Animadversio I.

216. Si factum ex radicalium multiplicatione fuerit talis magnitudo, ut ex illa radix a ſigno indicata elici queat, radix hujuſmodi erit factum quæſitum, ut proinde ſola ſigni radicalis abiectione tunc multiplicatio fiat. Sic factum ex multiplicatione radicalis $\sqrt{a}$ per radicalem $\sqrt{a}$, erit magnitudo a. Eſt enim $\sqrt{aa} = a$. Id porro perſpicuum adhuc fiet, ſi quantitas $\sqrt{a}$ ſpectetur, ut poteſtas imperfecta, nimirum ſi formulæ $\sqrt{a}$ hæc alia ſubſtituatur $a^{\frac{1}{2}}$. Manifeſtum namque eſt, tunc haberi $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$, ſive $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ (§.46.) $= a$.

Animadversio II.

217. Si quantitates radicales *coefficientibus* affectæ ſint, hi multiplicari inter ſe mutuo debent, & factum ſigno radicali, veluti *coefficiens* quantitatis ſub ſigno poſitæ, præfigi. Ut ſi multiplicanda ſit quantitas $a\sqrt{b}$ per quantitatem $d\sqrt{m}$, productum erit $ad\sqrt{bm}$. Patet ex §. 44.

Animadversio III.

218. Si quantitas radicalis multiplicanda ſit per quantitatem rationalem, hæc ſigno radicali præfigatur. Sic factum ex ductu radicalis $\sqrt{b}$ in quantitatem rationalem a erit $a\sqrt{b}$. Manifeſta eſt ex §. 45.

PROBLEMA VI.

Magnitudines irrationales ſimplices dividere.

Reſolutio.

219. Facta earum reductione ad idem nomen, ſi diverſæ denominationis fuerint (§. 210.), dividantur quantitates ſub ſigno poſitæ, perinde ac ſi eſſent rationales, & *quoto* ſignum radicale cum ſuo *exponente* præfigatur.

Exemplum.

Ut ſi dividenda ſit radicalis $\sqrt{ab}$ per radicalem $\sqrt{a}$, *quotus* erit $\sqrt{b}$.

Demonſtratio.

Quandoquidem habetur $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (§. 215.). Ergo $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}$ (§. 66.).

Ani-

ANIMADVERSIO I.

220. Si *quotus* fuerit hujuſmodi quantitas, ut ex illa extrahi poſſit radix a ſigno denominata, radix iſta erit *quotus* diviſionis. Nimirum cum *quotus* radicalis $\surd ab^2$ diviſæ per $\surd a$ ſit $\surd b^2$ (§. 219.), ſitque $\surd b^2 = b$ (§. 216.), erit radix *b* *quotus* radicalis $\surd ab^2$ per radicalem $\surd a$ diviſæ.

ANIMADVERSIO II.

221. Si *quotus* fuerit fractio, obſervandum eſt, num ex numeratore, vel denominatore ipſius fractionis, aut ex utroque elici poſſit radix a ſigno radicali indicata. Si enim ex utroque termino radix hujuſmodi ſummi queat, eliciatur; tum ex hiſce radicibus fiat fractio, neglecto ſigno radicali, quæ erit *quotus* quæſitus. Si autem ex altero ipſorum terminorum dumtaxat radix ipſa ſumi poſſit, ex illo extrahatur; illi vero, cui nequit extrahi, relinquatur ſignum radicale, eritque hujuſmodi fractio *quotus* diviſionis. Videlicet quoniam diviſa radicali $\surd ab^2$ per radicalem $\surd ad^2$, *quotus* eſt fractio $\frac{\surd b^2}{\surd d^2}$ (§. 73.), ex cujus terminis poteſt ſumi radix quadrata, quam indicat ſignum $\surd$, *quotus* hujuſce diviſionis erit fractio $\frac{b}{d}$, facta nimirum ex radicibus terminorum b^2, d^2. Conſtat enim, $\surd b^2$ idem eſſe ac *b*, quemadmodum $\surd d^2$ idem ac *d*. Quoniam vero *quotus* radicalis $\surd ab^2$ diviſæ per radicalem $\surd ad$ eſt fractio $\frac{\surd b^2}{\surd d}$, ex cujus numeratore poteſt ſumi radix a ſigno denominata, *quotus* hujuſce diviſionis erit fractio $\frac{b}{\surd d}$.

ANIMADVERSIO III.

222. Si quantitates radicales, quarum una per aliam dividenda eſt, diſſimiles omnino inter ſe fuerint, quantitati dividendæ ea, per quam dividi debet, ducta lineola, ſubſcribatur, perinde ac de rationalibus diſſimilibus dictum eſt (§. 70.), totique fractioni, vel utrique termino ſeorſim, radicale ſignum præfigatur. Ut ſi dividere oporteat radicalem $\surd a$ per radicalem $\surd b$, ſcribendum eſt $\surd\frac{a}{b}$, vel $\frac{\surd a}{\surd b}$.

ANIMADVERSIO IV.

223. Si quantitates ſub ſigno poſitæ *coefficientibus* numeris affectæ fuerint,

rint, hi quoque dividi debent, & *quotus* ex diviſione *coefficientium* debet præfigi ſigno radicali quotientis geniti ex diviſione radicalium. Sic diviſa radicali $6\sqrt{ab}$ per radicalem $2\sqrt{b}$, *quotus* erit $3\sqrt{a}$. Eſt enim $2\sqrt{b}\times 3\sqrt{a} = 6\sqrt{ab}$ (§. 217.).

Animadversio V.

224. Si dividere oporteat quantitatem radicalem per rationalem, vel rationalem per radicalem, quantitas rationalis elevetur ad poteſtatem denominatam a ſigno quantitatis radicalis, ipſaque poteſtas ſub ſigno collocetur, ut nimirum veluti radicalis tractari poſſit, & tunc fiat earum diviſio perinde ac ſi eſſent radicales. Ut ſi dividenda proponatur radicalis $\sqrt{ab^2}$ per rationalem b, facta elevatione rationalis b ad quadratum b^2, eaque ſub ſigno poſita, dividi debet $\sqrt{ab^2}$ per $\sqrt{b^2}$. Similiter ſi dividenda ſit rationalis a per radicalem $\sqrt{b}$, evecta quantitate a ad quadratum, eique præfixo ſigno radicali, ita nimirum ut fiat $\sqrt{a^2}$, fieri debet diviſio ipſius $\sqrt{a^2}$ per $\sqrt{b}$. Ratio eſt evidens; cum nempe ſit $\sqrt{b^2} = b$, & $\sqrt{a^2} = a$.

Problema VII.

Quantitatem irrationalem incomplexam ad datam poteſtatem elevare.

Reſolutio.

225. Quantitas irrationalis ad datam poteſtatem evehenda ſpectetur ſub formula poteſtatis imperfectæ, ejuſque *exponens* fractionarius ducatur in *exponentem* poteſtatis, ad quam data quantitas evehenda eſt, perinde ac ſi eſſet rationalis.

Exemplum.

Ut ſi ad tertiam poteſtatem elevare oporteat radicalem $\sqrt{a}$, ſpectata $\sqrt{a}$ ſub formula $a^{\frac{1}{2}}$, cum *exponens* tertiæ poteſtatis ſit 3, ſitque $\frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2}$, erit $a^{\frac{3}{2}}$, ſive $\sqrt[2]{a^3}$ poteſtas tertia radicalis $\sqrt{a}$.

Demonſtratio.

Patet ex dictis de formatione poteſtatum quantitatis rationalis incomplexæ.

PROBLEMA VIII.

Radicem extrahere ex quantitate irrationali incomplexa.

Reſolutio.

226. Spectata quantitate propoſita ſub formula poteſtatis imperfectæ, illius *exponens* fractionarius dividatur per *exponentem* radicis quæſitæ, ut ſi eſſet quantitas rationalis.

Exemplum.

Sic radix cubica quantitatis radicalis $\sqrt{a}$ erit $\sqrt[6]{a}$. Quandoquidem diviſo *exponente* $\frac{1}{2}$ quantitatis $\sqrt{a}$, ſub formula imperfectæ poteſtatis conſideratæ, per *exponentem* 3 radicis cubicæ, *quotus* eſt $\frac{1}{6}$, ut proinde radix cubica quantitatis $a^{\frac{1}{2}}$ ſeu $\sqrt{a}$ ſit $a^{\frac{1}{6}}$, ſive $\sqrt[6]{a}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex ipſa natura analyſeos.

COROLLARIUM.

227. Itaque obtinetur radix propoſita datæ radicalis, ſi *exponens* ſigni, ſub quo quantitas ipſa jacet, per *exponentem* quæſitæ radicis multiplicetur, & factum eidem ſigno, veluti illius *exponens*, appingatur. Conſtat enim, radicalem $\sqrt[6]{a}$ eſſe radicem cubicam radicalis $\sqrt[2]{a}$, atque *exponentem* 6 radicalis $\sqrt[6]{a}$ oriri ex ductu *exponentis* 2 datæ radicalis $\sqrt[2]{a}$ in *exponentem* 3 radicis cubicæ quæſitæ.

HYPOTHESIS II.

228. Radix radicis interdum indicari ſolet præfigendo ſignum radicale cum ſuo *exponente* priori ſigno radicali, quo nimirum radix prima affecta eſt. Sic ad exprimendam radicem quadratam radicalis $\sqrt[2]{a}$, ſcribitur $\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$; ad indicandam radicem cubicam ejuſdem $\sqrt[2]{a}$, ſcribitur $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$, atque ita de ceteris.

PROBLEMA IX.

Radicem radicis ad radicem primam revocare:

Reſolutio.

229. *Exponens* radicis radicis multiplicetur per *exponentem* radicis primæ. Factum erit *exponens* radicis, ad quam radix ipſa radicis revocanda erat.

Exemplum.

Ut ſi ad radicem primam revocare oporteat radicem $\sqrt[3]{}$ radicis $\sqrt[2]{a}$; hæc erit $\sqrt[6]{a}$.

Demonſtratio.

Eſt enim $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$ (§. 227.).

SCHOLION:

230. Reductis radicibus radicum ad radices primas, eodem modo, quo radicalium primarum, illarum additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio perficitur.

Calculus radicalium complexarum.

DEFINITIO VI.

231. *Quantitates radicales complexæ vocantur illæ, quæ pluribus terminis radicalibus conſtant, interjecto ſigno* +, *vel* — *ſimul unitis*. Hujuſmodi eſt quantitas $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, quæ radicalis *binomia*, $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, quæ radicalis *trinomia* nuncupatur, & ſic deinceps.

PROBLEMA X.

Quantitates irrationales complexas ſimul addere.

Reſolutio.

232. Facta earum reductione ad ſimpliciorem expreſſionem; colligantur ſimul ope ſigni +, perinde ac ſi eſſent rationales complexæ.

Exem-

Exemplum.

Ut, ſi quantitati $\sqrt{aab}+\sqrt{bx}$ adiicienda ſit quantitas $\sqrt{md}-\sqrt{dde}$, ſumma erit $a\sqrt{b}+\sqrt{bx}+\sqrt{md}-d\sqrt{e}$.

Demonſtratio.

Patet ex ipſa natura ſigni $+$, quo quantitates ipſæ ſimul copulantur.

ANIMADVERSIO I.

233. Si occurrant quantitates ſimiles ſub ſigno radicali poſitæ, eademque nota $+$, vel $-$ affectæ, facta *coefficientium* ſumma, hæc uni illarum præfigatur, ceteris in ipſa ſumma deletis. Si autem quantitates ſub ſigno poſitæ, fuerint quidem ſimiles inter ſe, ſed notis contrariis affectæ, *coefficiens* radicalis ſubtrahendæ ſubducatur *coefficienti* illius, cui fieri debet ſubductio, & reſiduum quantitati ſub ſigno exiſtenti, veluti illius *coefficiens*, præfigatur. Ut ſi habeatur ſumma $a\sqrt{x}+\sqrt{d}+m\sqrt{x}-\sqrt{e}$ ex quantitate $\sqrt{mmx}-\sqrt{e}$ adjecta quantitati $\sqrt{aax}+\sqrt{d}$, cum termini $a\sqrt{x}$, $m\sqrt{x}$ eandem quantitatem x ſub ſigno habeant, eademque nota $+$ ſint affecti, collectis in unum *coefficientibus* a, m, ſumma erit $\overline{a+m}\sqrt{x}+\sqrt{d}-\sqrt{e}$. Eſt enim $\overline{a+m}\sqrt{x}=a\sqrt{x}+m\sqrt{x}$ (§. 213.). Similiter cum termini $a\sqrt{x}$, $d\sqrt{x}$ ſummæ $a\sqrt{x}+\sqrt{m}+\sqrt{dp}-d\sqrt{x}$ eandem quantitatem x ſub ſigno habentes, contrariis notis affecti ſint, facta ſubductione *coefficientis* d a *coefficiente* a, & reſiduo $a-d$ eidem termino radicali $\sqrt{x}$ præpoſito, ſumma erit $\overline{a-d}\sqrt{x}+\sqrt{m}+\sqrt{dp}$. Manifeſtum namque eſt, eſſe $\overline{a-d}\sqrt{x}=a\sqrt{x}-d\sqrt{x}$ (§. 214.).

ANIMADVERSIO II.

234. Si radicalibus magnitudinibus, quarum ſumma quæritur, quantitates rationales permixtæ habeantur, ipſæ quoque ſimul colligendæ ſunt, & ad ſimpliciorem expreſſionem reducendæ. Sic ſumma ex quantitate radicali $3a+\sqrt{m}$ adjecta radicali $4a-2b+\sqrt{d}$ erit $4a-2b+\sqrt{d}+3a+\sqrt{m}$, ſive reductis terminis ſimilibus, $7a-2b+\sqrt{d}+\sqrt{m}$.

PROBLEMA XI.

Quantitates irrationales complexas ſubtrahere.

Reſolutio.

235. Reductis terminis ad ſimpliciorem expreſſionem, quantitas ſubtrahenda ope ſigni — illi adiiciatur, cui fieri debet ſubtractio, ejuſque ſigna mutentur, ut de rationalibus complexis diximus.

Exemplum.

Ut ſi quantitati $\sqrt{aab}+\sqrt{d}$ ſubtrahenda ſit quantitas $\sqrt{eef}-\sqrt{m}$, ſcribendum eſt pro reſiduo $a\sqrt{b}+\sqrt{d}-e\sqrt{f}+\sqrt{m}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex legibus ſubtractionis magnitudinum complexarum rationalium.

ANIMADVERSIO I.

236. Si in reſiduo occurrant termini, qui eandem ſub ſigno radicali quantitatem habeant, colligantur ſimul eorum *coefficientes*, ſi eodem ſigno termini ipſi affecti ſunt; unus vero alteri ſubducatur, ſi eorum ſigna ſint contraria, & ſumma in primo, reſiduum vero in ſecundo caſu quantitati ſub ſigno poſitæ præfigatur, ut diximus, loquendo de additione, quæ non ſunt repetenda.

ANIMADVERSIO II.

237. Si quæ ſint quantitates rationales radicalibus permixtæ, conſiderentur in ſubtractione perinde ac ſi eſſent ſolæ; eaque proinde in illarum ſubductione executioni mandentur, quæ de ſubtractione rationalium magnitudinum ſuperiori jam loco, nimirum §. 27. & *ſequentibus*, tradidimus. Sic reſiduum ex magnitudine $2a+\sqrt{b}$ ſubducta magnitudini $6a+\sqrt{d}$ erit $4a+\sqrt{d}-\sqrt{b}$. Eſt enim $6a-2a=4a$.

PRO

PROBLEMA XII.

Quantitates irrationales complexas multiplicare.

Reſolutio.

238. Si termini diverſi nominis fuerint, ad eandem denominationem revocentur (§. 210.); tum ſinguli termini unius ducantur in ſingulos terminos alterius, & producta partialia ope ſignorum, quæ juxta leges multiplicationis alibi traditas (§. 53. & ſeq.), ſingulis conveniunt, ſimul copulentur, ſigno radicali ſingulis præfixo.

Exemplum.

Ut ſi multiplicanda ſit radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per radicalem $\sqrt{d}-\sqrt{e}$, multiplicari debet uterque terminus radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ primo per $\sqrt{d}$, deinde per $-\sqrt{e}$; cumque ſit $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\sqrt{d}=\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$ (§. 53.), & $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times-\sqrt{e}=-\sqrt{ae}-\sqrt{be}$ (§. 54.), productum totale ex hac multiplicatione conſurgens erit $\sqrt{ad}+\sqrt{bd}-\sqrt{ae}-\sqrt{be}$,

Demonſtratio.

Patet ex multiplicatione incomplexarum radicalium, & ex multiplicatione rationalium complexarum.

ANIMADVERSIO I.

239. Si termini radicales multiplicandi *coefficientibus* ſint affecti, facta multiplicatione quantitatum ſub ſigno poſitarum, ipſorum, *coefficientes* in ſe invicem ducantur, & factum ante ſignum, veluti *coefficiens* quantitatis ſub ſigno poſitæ, ſtatuatur, ut diximus ſupra loquendo de multiplicatione radicalium incomplexarum §. 217. Sic productum ex radicali $\overline{a\sqrt{b}+3\sqrt{d}}$ ducta in radicalem $\overline{m\sqrt{e}+2\sqrt{x}}$ erit $am\sqrt{be}+3m\sqrt{de}+2a\sqrt{bx}+6\sqrt{dx}$.

ANIMADVERSIO II.

240. Si quantitatibus radicalibus, quarum una in aliam ducenda eſt, rationales permixtæ fuerint, eodem modo inſtitui debet multiplicatio, quo ipſa fit, cum rationalis per rationalem, vel radicalis per rationalem, juxta

ſuperius dicta peragitur. Ut ſi multiplicare oporteat $\overline{4ab+\sqrt{d}}$ per $\overline{3ab+\sqrt{x}}$, productum erit $12abab+3ab\sqrt{d}+4ab\sqrt{x}+\sqrt{dx}$. Eſt enim $4ab\times 3ab=12abab$ (§. 44.), $\sqrt{d}\times 3ab=3ab\sqrt{d}$ (§. 218.), $4ab\times\sqrt{x}=4ab\sqrt{x}$ (§. 218.), $\sqrt{d}\times\sqrt{x}=\sqrt{dx}$ (§. 215.).

S C H O L I O N.

241. Nihil hic addimus de multiplicatione radicalis complexæ per quantitatem incomplexam tam rationalem, quam radicalem, cum id ex hactenus traditis ſatis aperte cuique conſtet.

PROBLEMA XIII.

Magnitudines irrationales complexas dividere.

Reſolutio.

242. Reducantur ad eandem denominationem, ſi diverſi nominis fuerint tum dividantur, ut rationales complexæ, & ſingulis *quotis* radicale ſignum præfigatur.

Exemplum.

Eſto radicalis $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$ per radicalem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ dividenda. Primo itaque divido terminum $\sqrt{de}$ per terminum $\sqrt{e}$ diviſoris, qui in ipſo $\sqrt{de}$ reperitur; cumque hujuſce diviſionis *quotus* ſit $\sqrt{d}$ (§. 81.), multiplico integrum diviſorem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ per *quotum* $+\sqrt{d}$, & factum $\sqrt{de}-\sqrt{dm}$ ſubtraho magnitudini dividendæ $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$. Reſidui $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$ terminum $-\sqrt{ae}$, cui diviſor $\sqrt{e}$ itidem includitur, divido per eundem $+\sqrt{e}$, & *quotum* $\sqrt{a}$ ope ſigni $-$, quod illi debetur (§. 83.), adjungo priori *quoto* $\sqrt{d}$, ita ut fiat $\sqrt{d}-\sqrt{a}$. *Quotum* $-\sqrt{a}$ modo inventum multiplico per integrum diviſorem $\sqrt{e}-rm$, quodque hinc efficitur $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$, aufero ex toto reſiduo $-\sqrt{ae}+\sqrt{am}$. Quoniam igitur ex hac ſubductione nihil, ut patet, relinquitur, ductoque diviſore $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ in *quotum* $\sqrt{d}-\sqrt{a}$, emergit quantitas ipſa $\sqrt{de}-\sqrt{ae}-\sqrt{dm}+\sqrt{am}$, *quotus* datæ radicalis per radicalem $\sqrt{e}-\sqrt{m}$ diviſæ erit $\sqrt{d}-\sqrt{a}$.

Demonſtratio.

Patet ex dictis de diviſione tum radicalium ſimplicium, tum rationalium.

ANI-

Digitized by Google

ANIMADVERSIO I.

243. Si termini radicales *coefficientibus* ſint affecti, ipſi quoque dividendi ſunt, ut diximus in diviſione radicalium ſimplicium §. 223. Si autem quantitates rationales radicalibus ſint permixtæ, memoria repetantur, quæ dicta ſunt §. 224. de diviſione rationalis per radicalem, vel radicalis per rationalem.

ANIMADVERSIO II.

244. Si quantitates radicales, quarum una per aliam dividenda eſt, omnino diſſimiles inter ſe fuerint, diviſor, ducta lineola, quantitati dividendæ ſubſcribatur. Hæc enim fractio erit *quotus* diviſionis quæſitus. *Quotus* nempe radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ diviſæ per radicalem $\sqrt{d}-\sqrt{x}$ erit fractio $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{d}-\sqrt{x}}$

SCHOLION I.

245. Nihil de diviſione radicalis complexæ per quantitatem radicalem, vel per rationalem incomplexam adiiciendum cenſui, quod hujuſmodi calculus ex hactenus traditis ſatis pateat.

SCHOLION II.

246. Eodem modo fit additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio radicalium, quæ *imaginariæ* dicuntur, hoc uno dumtaxat notato, ut non mutentur ſigna, quibus affectæ ſunt quantitates ſub ſigno poſitæ. Nimirum pro facto radicalis $\sqrt{-a}$ multiplicatæ per radicalem $\sqrt{-b}$ ſcribendum non eſt $\sqrt{+ab}$, ſed $\sqrt{-ab}$. Repugnat enim, quemadmodum ſuperiori etiam loco innuimus (§. 201.), ut ex ductu quantitatis imaginariæ in aliam imaginariam realis quantitas producatur.

PROBLEMA XIV.

Magnitudines irrationales ſimplices dividere.

Reſolutio.

247. Data quantitas ſpectetur ſub formula poteſtatis imperfectæ; tum ea executioni mandentur, quibus perficitur formatio poteſtatum quantitatis rationalis complexæ.

Exemplum I.

Ut ſi ad ſecundam poteſtatem evehenda ſit radicalis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, ſumta ipſa quantitate ſub formula $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$, illius quadratum erit $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$, ſive $a+2\sqrt{ab}+b$, nempe factum ex quadrato a partis prioris $\sqrt{a}$, ex $2\sqrt{ab}$ duplo ejus, quod fit multiplicando partem priorem $\sqrt{a}$ per poſteriorem $\sqrt{b}$, & ex quadrato b partis poſterioris $\sqrt{b}$.

Exemplum II.

Similiter cubus ejuſdem quantitatis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ſpectatæ ſub eadem formula $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ erit $a^{\frac{3}{2}}+3ab^{\frac{1}{2}}+3ba^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}$, ſeu $\sqrt{a^3}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}$, videlicet factum ex cubo $\sqrt{a^3}$ partis prioris $\sqrt{a}$, ex $3a\sqrt{b}$ triplo ejus quod fit multiplicando quadratum a ejuſdem partis primæ $\sqrt{a}$ per ſecundam $\sqrt{b}$, ex $3b\sqrt{a}$ triplo producti ex ductu quadrati b partis poſterioris $\sqrt{b}$ in priorem $\sqrt{a}$, & ex $\sqrt{a^3}$ cubo ejuſdem partis poſterioris $\sqrt{b}$. Eodem modo ratiocinare de aliis.

Demonſtratio.

Coincidit cum ea, qua oſtenditur formatio poteſtatum quantitatis rationalis complexæ.

PROBLEMA XV.

Radicem ex quantitate irrationali complexa elicere.

Reſolutio.

248. Sumta ipſa quantitate ſub formula poteſtatis imperfectæ, eodem artificio radix cujuſvis gradus extrahatur, quo ipſa eadem radix elicitur ex quantitate rationali complexa.

Exemplum I.

Extrahere oporteat radicem quadratam ex quantitate $a+2\sqrt{ab}+b$. Spectata igitur ipſa quantitate ſub formula $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$ poteſtatis imperfectæ, ſumatur radix quadrata $a^{\frac{1}{2}}$ ex primo elemento a, tum per illius duplum $2a^{\frac{1}{2}}$ dividatur elementum $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, cui illa includitur; & quotus $b^{\frac{1}{2}}$ radici $a^{\frac{1}{2}}$

adji.

adiiciatur ope ſigni $+$, quod illi convenit. Nullum autem aliud elementum eſt in data quantitate, cui radix $a^{\frac{1}{2}}$ inexiſtat; factaque elevatione quantitatis $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ ad quadratum, emergit quantitas data, ut patet. Ergo $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, ſive $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ erit radix quæſita.

Exemplum II.

Extrahenda ſit radix cubica ex quantitate $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$: Itaque ſpectata ipſa quantitate ſub formula $a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3ba^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$, ſumatur radix cubica $a^{\frac{1}{2}}$ ex primo elemento $a^{\frac{3}{2}}$; tum ipſa radice ad quadratum a evecta, per ipſius triplum $3a$ dividatur elementum $3ab^{\frac{1}{2}}$, cui includitur, & quotus $b^{\frac{1}{2}}$ ipſi radici ope convenientis ſigni $+$ adiiciatur. Nullum autem aliud elementum in ipſa quantitate occurrit, cui quadratum a inexiſtat, & ſi quantitas $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ad cubum elevetur, fit ipſa quantitas data, ut eſt manifeſtum. Igitur radix cubica datæ quantitatis erit $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$, ſive $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Idipſum de aliis dicito.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum illa, qua oſtenditur extractio radicis ex quantitate rationali complexa.

S C H O L I O N.

249. Si data quantitas irrationalis hujuſmodi non fuerit, ut quæſita radix ex ipſa elici queat, quantitas incomplexa illi ſubſtituatur, eique ſignum radicale $\sqrt{}$ ſuo *exponente* affectum præfigatur; tum hæc ipſa quantitas radicali ſigno affecta, ſpectetur in calculo veluti radix quæſita. Ut ſi computanda ſit in calculo radix cubica quantitatis $\sqrt{ab+\sqrt{d}\sqrt{-x}}$, cum hæc ex ipſa quantitate elici nequeat, facta hypotheſi, ut ſit $\sqrt{ab+\sqrt{d}-\sqrt{x}}=p$, radix cubica datæ ipſius quantitatis in calculo deinceps conſideranda, erit $\sqrt[3]{p}$.

SE-

Digitized by Google

SECTIO NONA.

Axiomata generalia Matheſeos.

DEFINITIO I.

250. *Totum dicitur illa magnitudo, quæ ex pluribus aliis ſimul unitis conſurgit. Magnitudines vero illæ, ex quarum unione fit totum, partes vocantur.* Ut ſi ex magnitudinibus a, b, c ſimul unitis fiat magnitudo d, hæc erit *totum*, illæ vero ipſius *partes*. Dividitur autem *pars* in *aliquotam*, & *aliquantam*.

DEFINITIO II.

251. *Pars aliquota eſt illa, quæ aliquoties ſumta ſuum totum adæquat.* Contra vero *aliquanta*, *quæ*, *ſi aliquoties ſumatur*, *ſuum totum vel non explet*, *vel ſuperat*. Sic numerus 2 eſt pars *aliquota* numeri 6, & numerus 3 eſt pars *aliquanta* numeri 10. Etenim numerus 2 *ter* ſumtus efficit numerum 6. At vero ſi numerus 3 *ter* ſumatur, numerum *denario* minorem, *quater* vero ſumtus numerum *denario* majorem conſtituit.

DEFINITIO III.

252. *Magnitudines illæ dicuntur æquales, quarum valor eſt idem. Inæquales vero, quarum valor eſt diverſus.* Ut ſi ponatur $a = 3$, $b = 3$, $d = 4$, duæ a, b *æquales* erunt inter ſe, duæ autem a, d, ſicuti etiam duæ b, d *inæquales*.

COROLLARIUM.

253. *Una duarum magnitudinum æqualium poteſt, ſalva quantitate, alteri ſubſtitui. Una vero duarum inæqualium alteri ſubſtitui nequit, quin valor fiat diverſus.* Hinc Cl. Volfius vocat *æqualia*, *quorum unum alteri*, *ſalva quantitate*, *ſubſtitui poteſt*, *inæqualia autem*, *ſi pars unius poſſit alteri toti ſubſtitui* (a).

DEFINITIO IV.

254. *Magnitudo major vocatur illa, cujus una tantum pars, eſt alteri, cui comparatur, æqualis. Illa vero minor dicitur, quæ unam dumtaxat alterius partem adæquat.* Sic magnitudo $a + b$ erit major, & magnitudo d erit minor, ſi fuerit $a = d$.

Co-

(a) Elem. Arith. §. 15., & 20.

Corollarium.

255. *Duarum inæqualium magnitudinum altera major, altera minor neceſſario eſt.* Unius enim pars eſt alteri toti magnitudini æqualis.

Axioma I.

Omne totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis, & omnes partes cujuſvis totius ſimul ſumtæ ſunt ipſi toto æquales.

256. Ut ſi omnes partes magnitudinis m fuerint a, b, c, erit $m = a + b + c$, & $a + b + c = m$.

Axioma II.

Omne totum eſt majus quolibet ſui parte ſeorſim ab aliis ſumta; & viciſſim quælibet pars eſt minor ſuo toto.

257. Videlicet ſi magnitudines a, b, c fuerint partes totius m, erit $m > a$, $m > b$, $m > c$.

Axioma III.

Omnis magnitudo eſt ſibimetipſi æqualis.

258. Uſus hujus principii ampliſſimus eſt, ut notat Cl. Volfius (a). Plerumque enim accidit, ut eadem magnitudo ad ſeipſam referri debeat.

Axioma IV.

Magnitudines, quæ eidem, vel æqualibus magnitudinibus ſunt æquales; inter ſe quoque ſunt æquales.

259. Ut ſi magnitudines a, b æquales fuerint eidem magnitudini c, vel æqualibus c, d, erunt quoque inter ſe æquales.

Axioma V.

Magnitudines inæqualibus æquales, ſunt inter ſe inæquales.

260. Si nempe duæ magnitudines a, b æquales ſint duabus c, d, altera alteri, duæ a, b inæquales erunt inter ſe, ſi duæ c, d fuerint inæquales. Videlicet erit $a > b$, ſi fuerit $c > d$; erit vero $a < b$, ſi itidem fuerit $c < d$.

Axio-

(a) Elem. Arith. §. 22.

Digitized by Google

Axioma VI.

Magnitudo, quæ uni æqualium æqualis eſt, alteri quoque earundem eſt æqualis.

261. Poſita nimirum æqualitate duarum magnitudinum a, b, ſi magnitudo d æqualis fuerit magnitudini a, etiam magnitudini b æqualis erit.

Axioma VII.

Si una duarum magnitudinum æqualium fuerit uni magnitudini æqualis, ipſarum quoque altera eidem æqualis erit.

262. Videlicet poſita æqualitate duarum magnitudinum a, b, ſi magnitudo a æqualis fuerit magnitudini d, etiam magnitudo b erit eidem d æqualis.

Axioma VIII.

Si una duarum magnitudinum æqualium æqualis fuerit uni duarum itidem æqualium, ipſarum quoque altera erit alteri earundem æqualis.

263. Ut ſi duæ magnitudines a, b æquales fuerint inter ſe, quemadmodum etiam duæ c, d; fuerit autem magnitudo a æqualis magnitudini c, etiam magnitudo b erit magnitudini d æqualis.

Axioma IX.

Si una duarum magnitudinum æqualium fuerit major, vel minor tertia, aut una duarum æqualium, etiam altera illarum erit eadem tertia, vel earundem altera major, vel minor.

264. Nimirum poſita æqualitate duarum a, b, ſi fuerit $a > c$, erit etiam $b > c$, & ſi fuerit $a < c$, erit etiam $b > c$. Similiter ſi fuerit $a > c$, erit quoque $b > d$, & ſi $a > c$, erit itidem $b < d$, admiſſa nempe æqualitate etiam duarum c, d.

Axioma X.

Si æqualibus magnitudinibus æquales addantur, tota erunt æqualia.

265. Ut ſi æqualibus magnitudinibus a, b adiiciantur æquales magnitudines c, d, erit $a+c=b+d$.

Digitized by Google

Axioma XI.

Si æqualibus magnitudinibus æquales partes ſubducantur, reſidua erunt æqualia.

266. Ut ſi æqualibus magnitudinibus a, b ſubducantur æquales partes c, d, erit $a-c=b-d$.

Axioma XII.

Magnitudo, quæ altera magnitudine, cui comparatur; neque major eſt, neque minor, eſt illi æqualis.

267. Ut ſi magnitudo a neque major, neque minor ſit magnitudine b erit ipſi æqualis, dummodo tamen magnitudo a ſit hujuſmodi, ut aliquoties ſumta magnitudinem b, cui comparatur, excedat.

Axioma XIII.

Si magnitudinibus inæqualibus æquales magnitudines addantur, tota erunt inæqualia.

268. Videlicet ſi fuerit $a>b$, & $c=d$, erit $a+c>b+d$.

Axioma XIV.

Si magnitudinibus inæqualibus æquales partes ſubducantur; reſidua erunt inæqualia.

269. Videlicet ſi fuerit $a>b$, & $c=d$, erit $a-c>b-d$.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER I.

De proportione, & proportionalitate Geometrica magnitudinum in genere.

PRoportionum theoriam primo loco tradendam cenſui, quod ab ea non tantum Matheſis tota dependeat, verum etiam mentis lumen mirum in modum excitetur, atque ad ea, quæ implexa ſunt maximeque abſtruſa, penetranda ſenſim mens ipſa deducatur.

DEFINITIO I.

1. *Magnitudines homogeneæ ſunt illæ, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt. Heterogeneæ vero, quarum una, ſi aliquoties ſumatur, alteram excedere nequit.* Magnitudines *homogeneæ* ſunt duæ *lineæ*, duæ *ſuperficies*, duæ *vires motivæ* &c. Una ſiquidem *linea* poteſt adeo augeri, ut alteram ſuperet, ſicuti etiam una *vis motiva* adeo poteſt intendi, ut aliam, ad quam refertur, excedat. At vero *linea*, & *ſuperficies* ſunt quantitates *heterogeneæ*; quia *linea* non eſt hujuſmodi, ut aliquoties ſumta *ſuperficiem* ſuperare poſſit.

DEFINITIO II.

2. *Proportio, quæ ratio etiam dicitur, eſt modus, quo una duarum magnitudinum alteram continet, vel in illa continetur.* Sic numerus 4 dicitur *proportionem* habere ad numerum 2, quatenus numerus 4 bis numerum 2 comprehendit; & viciſſim *ratio* numeri 2 ad numerum 4 in eo tota conſiſtit, ut numerus 2 in numero 4 bis reperiatur. Quoniam vero ex hac mutua duarum quantitatum comparatione, unius valor, qui antea ignotus erat, palam efficitur, definiri poteſt *proportio* cum Viro Cl. *ea homogeneorum relatio, quæ unius quantitatem determinat ex quantitate alterius ſine tertio homogeneo aſſumto* (a). Profecto ſi ex comparatione magnitudinis a cum magnitudine b dignoſcatur, magnitudinem a ter in b contineri, ex noto valore termini a valor quoque termini b nobis innoteſcit. Etenim ſi fuerit $a=3$, erit hoc ipſo $b=9$.

Co-

(a) Volfius Elem. Arith. §. 126.

Corollarium I.

3. *Non datur proportio niſi inter magnitudines homogeneas*. Niſi enim magnitudines, quarum una alteri comparatur, homogeneæ fuerint, non poterit earum una alteram continere, ſicuti una aliquoties ſumta nequit aliam excedere. *Finiti* propterea *ad infinitum nulla eſt proportio*. Quippe tantum abeſt, ut finita magnitudo quantumlibet multiplicata infinitam ſuperet, ut ne illam æquare unquam poſſit.

Corollarium II.

4. *Proportio duarum magnitudinum diviſionis ope palam efficitur*. Per diviſionem enim dignoſcitur modus, quò illarum una alteram continet, vel in altera continetur (*Syn. Alg.* §. 63.).

DEFINITIO III.

5. *Antecedens proportionis dicitur illa magnitudo, quæ ad aliam refertur: illa vero proportionis conſequens vocatur, ad quam alia refertur*. Ut ſi magnitudo a magnitudini b comparetur, magnitudo a erit *antecedens proportionis*, & magnitudo b ejuſdem *conſequens*.

HYPOTHESIS I.

6. Ratio duarum magnitudinum per fractionem exprimitur, cujus numerator ſit ipſius proportionis *antecedens terminus*, denominator vero illius *conſequens*. Videlicet ratio magnitudinis a ad magnitudinem b deſignatur per fractionem $\frac{a}{b}$. Cum enim fractio $\frac{a}{b}$ diviſionem indicet magnitudinis a per magnitudinem b (*Syn. Alg.* §. 70.); diviſio autem proportionem determinet termini a diviſi ad diviſorem b (§. 4.), ipſa quoque fractio $\frac{a}{b}$ proportionem determinabit numeratoris a ad denominatorem b.

DEFINITIO IV.

7. *Exponens rationis*, qui illius etiam *denominator* dici ſolet, *eſt quantitas integra, vel fracta modum definiens, quo antecedens proportionis terminus conſequentem continet, vel in illo continetur*. Sic numerus 3 dicitur *exponens* rationis, quam habet numerus 6. ad numerum 2. Determinat enim, numerum 6. ter numerum 2, ad quem refertur, comprehendere. Similiter fra-

ctio

ctio $\frac{1}{3}$ eſt *exponens* rationis numeri 6 ad numerum 18. Quandoquidem palam efficit, antecedentem 6 eſſe unam tertiam partem conſequentis 18, ſive antecedentem illius proportionis terminum ter in ſuo conſequente comprehendi.

Corollarium I.

8. *Exponens rationis non differt a quotiente antecedentis termini per conſequentem diviſi.* Ut ſi *quotus* magnitudinis *a* diviſæ per magnitudinem *b* fuerit *m*, quantitas *m* erit *exponens* rationis, quam habet magnitudo *a* ad magnitudinem *b*. Etenim *quotus m* unitati comparatus modum determinat, quo terminus *a* diviſus continet diviſorem *b*, vel in ipſo *b* comprehenditur (*Syn. Alg.* §. 64.).

Corollarium II.

9. *Antecedens proportionis terminus ſe habet ad conſequentem, ut exponens ipſius proportionis ad unitatem.* Diviſa namque magnitudo toties continet diviſorem, quoties quotus diviſionis unitatem complectitur; vel quæ pars, vel partes unitatis eſt quotus, eadem pars, vel eædem partes diviſoris eſt magnitudo ipſa diviſa (*Syn. Alg.* §. 64.). *Exponens* autem rationis idem eſt cum *quoto* termini antecedentis per conſequentem diviſi (§. 8.). Ergo, ut *exponens* proportionis eſt ad unitatem, ita ſe habet antecedens ad conſequentem.

Corollarium III.

10. *Si conſequens proportionis fuerit unitas, antecedens ejuſdem terminus erit exponens rationis, quam habet antecedens ad conſequentem.* Quantitas nempe *a* eſt *exponens* rationis ipſius *a* ad unitatem. Eſt enim $\frac{a}{1} = a$ (*Syn. Alg.* §. 69.).

Corollarium IV.

11. *In omni proportione ſi conſequens per exponentem multiplicetur, productum efficitur antecedenti termino æquale.* Ut ſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit *m*, erit $bm = a$. Etenim multiplicato diviſore per *quotum*, fit ipſa magnitudo diviſa (*ibidem* §. 65.).

DE-

Digitized by Google

DEFINITIO V.

12. Proportio vel *rationalis* eſt, vel *irrationalis*. *Proportionem rationalem magnitudines illæ inter ſe habere dicuntur, quibus datur communis menſura, ſeu quarum valor vulgaribus numeris exprimi poteſt. Irrationalem vero illæ, quæ ſunt hujuſmodi, ut nulla communis quantitas eas metiri queat.* Dari magnitudines *commenſurabiles*, neminem latet. Extare vero *incommenſurabiles*, ſuo loco demonſtrabitur. Dividitur porro *proportio rationalis* in proportionem *æqualitatis*, & *inæqualitatis*.

DEFINITIO VI.

13. *Proportio æqualitatis eſt habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram ſemel exacte continet.* Hujuſmodi eſt ratio magnitudinis *a* ad magnitudinem *b*, ſi ponatur magnitudo *a* ſemel exacte magnitudinem *b* comprehendere.

COROLLARIUM.

14. *Exponens proportionis æqualitatis eſt unitas*, & viciſſim *magnitudines illæ ſunt æquales, quarum ratio habet pro exponente unitatem.* Omnis enim magnitudo ſemel dumtaxat ſeipſam continet; & quæ tantum ſemel exacte alteram continet, eſt illi æqualis.

DEFINITIO VII.

15. *Proportio inæqualitatis eſt habitudo duarum magnitudinum, quarum una alteram ſuperat.* Hæc autem duplex eſt, *majoris* nempe, & *minoris inæqualitatis*.

DEFINITIO VIII.

16. *Proportio majoris inæqualitatis eſt habitudo majoris magnitudinis ad minorem, ſive totius ad partem.* Contra vero *proportio minoris inæqualitatis eſt habitudo minoris magnitudinis ad majorem, ſeu partis ad totum.* Ut ſi fuerit $a > b$, ratio $\frac{a}{b}$ erit *majoris*, & ratio $\frac{b}{a}$ erit *minoris inæqualitatis*.

COROLLARIUM I.

17. *Exponens rationis majoris inæqualitatis eſt numerus major unitate, & ideo exponentem rationis æqualitatis excedit. Exponens vero rationis minoris inæqualitatis eſt numerus minor unitate, atque adeo minor exponente rationis æqualitatis. Exponens* namque rationis cujuſcumque ſe habet ad unitatem,

ut antecedens ipſius proportionis ad conſequentem (§. 9.); & *exponens ra*tionis æqualitatis ab unitate haudquaquam diſtinguitur (§. 14.).

COROLLARIUM II.

18. *Omnis ratio, cujus exponens unitatem ſuperat, eſt ratio majoris inæqualitatis. Illa vero, cujus exponens ab unitate deficit, eſt ratio minoris inæqualitatis*. Hoc enim ipſo illius antecedens conſequentem excedit; hujus vero antecedens a conſequente ſuperatur.

SCHOLION.

18. Proportionis *majoris inæqualitatis* quinque numerantur ſpecies, videlicet *multiplex*, *ſuperparticularis*, *ſuperpatiens*, *multiplexſuperparticularis*, & *multiplexſuperpartiens*. Tot ſimiliter recenſentur ſpecies proportionis *minoris inæqualitatis*, iiſdemque nominibus deſignantur, adjecta tamen illis particula *ſub*. Sunt enim *ſubmultiplex*, *ſubſuperparticularis*, *ſubſuperpartiens*, *ſubmultiplexſuperparticularis*, *ſubmultiplexſuperpartiens*.

DEFINITIO IX.

20. *Proportio multiplex eſt, cum antecedens aliquoties adæquate conſequentem continet. Submultiplex vero, cum antecedens aliquoties adæquate in conſequente comprehenditur. Multiplex* eſt propertio, quam habet 6 ad 1, *ſubmultiplex* ea, quam habet 1 ad 6. Etenim unitas *ſexties* in numero 6 continentur. Dividitur itaque proportio *multiplex* in *duplam*, *triplam*, *quadruplam*, atque ita deinceps in infinitum. *Submultiplex* vero in *ſubduplam*, *ſubtriplam*, *ſubquadruplam* &c. Proportio *dupla* eſt, cum antecedens *bis* conſequentem comprehendit, ut ratio 2 ad 1, & ſic deinceps. Viciſſim ratio *ſubdupla* eſt, cum antecedens *bis* in ſuo conſequente continetur, qualis eſt proportio 1 ad 2, *ſubtripla*, cum antecedens *ter* in ſuo conſequente comprehenditur, ut ratio 1 ad 3, atque ita de ceteris.

COROLLARIUM.

21 *Exponens rationis multiplicis eſt numerus vulgaris integer. Exponens rationis ſubmultiplicis eſt fractio, cujus numerator eſt unitas, denominator vero numerus ab unitate diverſus.* Sic *exponens* rationis *duplæ* eſt 2, rationis *triplæ* eſt 3, rationis *quadruplæ* eſt 4. &c. *Exponens* vero rationis *ſubduplæ* eſt $\frac{1}{2}$, *ſubtriplæ* $\frac{1}{3}$ &c.

DEFINITIO X.

22. *Proportio ſuperparticularis eſt, cum antecedens ſemel conſequentem continet, & unam inſuper illius partem aliquotam. Vieiſſim proportio ſubſuperparticularis eſt, cum antecedens ſemel cum una ſui parte aliquota in conſequente continetur.* Hujuſmodi eſt ratio, quam habet 3 ad 2, & viciſſim 2 ad 3. Etenim 3 ſemel continet 2, & inſuper unam illius partem dimidiam. Pro diverſa idcirco habitudine hujuſce partis aliquotæ exceſſus majoris termini ſupra minorem in plures ſpecies hoc proportionis genus diſtinguitur. Etenim ſi pars illa *bis* in minori contineatur, proportio majoris ad minorem dicitur *ſeſquialtera*, ut ratio 3 ad 2, ratio vero minoris ad majorem, ut 2 ad 3, vocatur *ſubſeſquialtera*. Si pars illa ſit una tertia minoris termini, proportio dicitur *ſeſquitertia*, ſi major ad minorem, ut 4 ad 3, vel *ſubſeſquitertia*, ſi minor ad majorem, ut 3 ad 4, referatur, & ſic deinceps.

COROLLARIUM.

23. *Exponens rationis ſuperpartieularis eſt unitas eum fractione, cujus numerator ſemper eſt unitas. Exponens vero rationis ſubſuperparticularis eſt fractio, cujus numerator una tantum unitate ſuo denominatore minor eſt.* Sic exponens rationis *ſeſquialteræ* eſt $\frac{1}{2}$, rationis *ſeſquitertiæ* eſt $1\frac{1}{3}$, rationis *ſeſquiquartæ* eſt $1\frac{1}{4}$ &c. *Exponens* vero rationis *ſubſeſquialteræ* eſt $\frac{2}{3}$, *ſubſeſquitertiæ* eſt $\frac{3}{4}$ &c.

DEFINITIO XI.

24. *Proportio ſuperpartiens eſt, eum antecedens ſemel conſequentem continet cum aliquot illius partibus aliquotis, quæ tamen ſimul ſumtæ unam ejuſdem aliquotam partem non conſtituunt. Proportio vero ſubſuperpartiens eſt, eum antecedens ſemel cum aliquot partibus ſuis aliquotis in conſequente continetur.* Talis eſt proportio, quam habet 5 ad 3, & 3 ad 5. Etenim 5 ſemel complectitur 3 cum *duobus* ejuſdem *trientibus*, qui unam aliquotam ejuſdem partem conſtituere nequeunt. In diviſione propterea proportionis *ſuperpartientis* ratio habenda eſt tum numeri partium aliquotarum exceſſus majoris termini ſupra minorem, tum illarum partium indolis. Itaque ſi antecedens ſemel cum *duobus trientibus* conſequentem contineat; quemadmodum numerus 5 continet 3, proportio dicitur *ſuperbipartiens tertias*. Si ſemel cum *duabus quintis*, dicitur *ſuperbipartiens quintas*, qualis eſt ratio numeri 7 ad numerum 5. Si ſemel cum *tribus ſeptimis*, vocatur *ſupertripartiens ſeptimas*, cujuſmodi eſt habitudo numeri 10 ad numerum 7, & ſic deinceps. Viciſſim vero ratio numeri 3 ad 5 dicitur *ſubſuperbipartiens tertias*; ratio

numeri 5 ad 7 *ſubſuperbipartiens quintas*; ratio numeri 7 ad 10 *ſubſupertripartiens ſeptimas* &c.

Corollarium.

25. *Exponens rationis ſuperpartientis eſt unitas cum fractione, cujus numerator numerum partium aliquotarum exceſſus majoris termini ſupra minorem indicat, denominator vero illarum qualitatem deſignat. Exponens autem rationis ſubſuperpartientis eſt fractio, cujus numerator tot unitatibus a denominatore deficit, quot partibus aliquotis minoris termini major ipſum ſuperat.* Nimirum *exponens* rationis *ſuperbipartientis tertias* eſt $1\frac{2}{3}$, rationis *ſuperbipartientis quintas* eſt $1\frac{2}{5}$, rationis *ſupertripartientis ſeptimas* eſt $1\frac{3}{7}$. *Exponens* vero rationis *ſubſuperbipartientis tertias* eſt $\frac{3}{5}$, rationis *ſubſupertripartientis quintas* eſt $\frac{5}{7}$, rationis *ſubſupertripartientis ſeptimas* eſt $\frac{7}{10}$ &c.

DEFINITIO XII.

26. *Proportio multiplex ſuperparticularis eſt, cum antecedens aliquoties conſequentem cum una ſui parte aliquota comprehendit. Proportio vero ſubmultiplex ſuperparticularis eſt, cum antecedens aliquoties cum una ſui parte aliquota in conſequente continetur.* Talis eſt proportio, quam inter ſe habent numeri 7, 3 *multiplex ſuperparticularis* nimirum eſt ratio numeri 7 ad numerum 3, *ſubmultiplex ſuperparticularis* autem ratio numeri 3 ad numerum 7 Quandoquidem 7 bis continet 3 cum una tertia ipſius parte. In hoc idcirco genere proportionis conſideranda eſt tum multiplex continentia minoris termini in majori; tum habitudo partis aliquotæ exceſſus ad terminum minorem. Si ergo major terminus bis minorem contineat & unam illius partem dimidiam, quemadmodum numerus 5 continet 2, proportio majoris ad minorem dicitur *duplaſeſquialtera*; ratio vero minoris ad majorem *ſubduplaſeſquialtera*. Si major ter complectatur minorem cum uno illlius quadrante, ratio majoris ad minorem vocatur *triplaſeſquiquarta*, qualis eſt ratio numeri 13 ad numerum 4, ratio vero minoris ad majorem, ut numeri 4 ad numerum 13, *ſubtriplaſeſquiquarta* nuncupatur. Eodem modo ratiocinare de aliis.

Corollarium.

27. *Exponens rationis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer cum fractione, cujus numerator ſemper eſt unitas. Exponens vero rationis ſubmultiplicis ſuperparticularis eſt fractio, cujus denominator exhibet partes aliquotiſ majoris termini, numerator autem, quot ex his in minori termino contineantur*

deſi-

deſignat. Sic *exponens* rationis *duplæ ſeſquialteræ* eſt $2\frac{1}{2}$, *triplæ ſeſquiquartæ* eſt $3\frac{1}{4}$; rationis vero *ſubduplæ ſeſquialteræ* eſt $\frac{2}{5}$, *ſubtriplæ ſeſquiquartæ* eſt $\frac{4}{13}$.

DEFINITIO XIII.

28. *Proportio multiplex ſuperpartiens eſt, cum antecedens aliquoties conſequentem continet cum aliquot ipſius partibus aliquotis, quæ tamen ſimul ſumtæ unam aliquotam illus partem minime conſtituunt. Proportio vero ſubmultiplex ſuperpartiens eſt, cum antecedens aliquoties, cum aliquot ſuis partibus aliquotis, unam aliquotam ejuſdem partem haudquaquam coæquantibus, in conſequente comprehenditur*. Sic *multiplex ſuperpartiens* eſt ratio numeri 11 ad numerum 3, *ſubmultiplex ſuperpartiens* ratio numeri 3 ad numerum 11. Quandoquidem numerus 11 ter cum *duobus trientibus* numerum 3 comprehendit. In diſcernendis idcirco ſpeciebus proportionis hujus generis habenda eſt ratio primo multiplicis continentiæ minoris termini in majori. Secundo numeri partium aliquotarum exceſſus majoris termini ſupra minorem aliquoties contentum. Tertio harum partium indolis. Hinc proportio numeri 11 ad numerum 3 vocatur *tripla ſuperbipartiens tertias*. Dicitur enim *tripla*, quia numerus 11 ter continet numerum 3. Dicitur *ſuperbipartiens tertias*, quia exceſſus majoris numeri ſupra minorem eſt 2, qui continet duas tertias partes minoris numeri 3. numeri 3. Viciſſim vero eandem ob cauſam ratio numeri 3 ad numerum 11 ratio *ſubtriplaſuperbipartiens tertias* nuncupatur. Hac eadem methodo ceteræ ſpecies hujus proportionis determinari facile poterunt.

COROLLARIUM.

29. *Exponens rationis multiplicis ſuperpartiens eſt numerus integer cum fractione, cujus numerator exhibet numerum partium aliquotarum exceſſus antecedentis ſupra conſequentem, denominator vero illarum partium indolem deſignat; Exponens vero rationis ſubmultiplicis ſuperpartientis eſt fractio, cujus denominator continet omnes partes aliquotas conſequentis; numerator vero eas numerat, quæ in antecedente continentur*. Sic *exponens* rationis *triplæ ſuperbipartientis tertias* eſt $3\frac{2}{3}$, rationis vero *ſubtriplæ ſuperbipartientis tertias* eſt $\frac{3}{11}$

SCHOLION.

30 Si *exponentes* rationum, quas hactenus explicavimus, attento animo expendantur, perſpicuum fiet, proportionem tam *majoris*, quam *minoris* inæ-

inæqualitatis nonniſi in quinque ſpecies modo traditas dividi poſſe.

DEFINITIO XIV.

31. *Duæ rationes dicuntur æquales, ſeu ſimiles, cum antecedentes earum termini eodem modo ſuos conſequentes continent, vel in illis continentur.* Sic ratio numeri 24 ad numerum 9 æqualis eſt rationi, quam habet numerum 8 ad numerus 3. Ut enim antecedens 24 *bis* cum *duobus trientibus* continet conſequentem 9, ita antecedens 8 *bis* cum *duobus trientibus* ſuum conſequentem 3 comprehendit. Similiter ratio numeri 2 ad numerum 6 adæquat rationem numeri 4 ad numerum 12. Quandoquidem antecedentes termini 2, 4, *ter* in ſuis conſequentibus 6, 12, continentur.

COROLLARIUM I.

32. *Ratio fractionis cujuſcumque ad unitatem eadem eſt cum ea, quam ipſius fractionis numerator ad ejuſdem denominatorem habet.* Mimirum fractio $\frac{a}{b}$ ſe habet ad unitatem, ut numerator a ad denominatorem b. Eodem namque modo fractio $\frac{a}{b}$ continet unitatem, vel in unitate continetur, quo numerator a complectitur denominatorem b, vel in illo comprehenditur (*Syn. Alg.* §. 99.).

COROLLARIUM II.

33. *In omni multiplicatione ratio producti ad terminum multiplicatum diverſa ab ea non eſt, quam habet terminus multiplicans ad unitatem.* Similiter *in omni diviſione ratio quotientis ad unitatem ſimilis eſt rationi termini diviſi ad diviſorem.* Patet quoad utramque partem ex ipſa natura multiplicationis, & diviſionis; nec non ex notione identitatis rationum modo expoſita. Cumque *exponens* rationis cujuſque non differat a quoto antecedentis termini per conſequentem diviſi (§. 8.), *ratio exponentis ad unitatem diverſa ab ea non erit, quam habet antecedens ad conſequentem*, prout ſuperiori etiam loco notavimus (§. 2.).

COROLLARIUM III.

34. *Rationes æquales eundem, ſive æquales exponentes habent.* Et viciſſim *rationes, quæ eundem, ſeu æquales exponentes habent, ſunt æquales.* Ut ſi ratio $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit rationi $\frac{c}{d}$ *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ æqualis erit *exponenti*

ra-

Digitized by Google

rationis $\frac{c}{d}$. Et ſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit *exponenti* rationis $\frac{c}{d}$, ratio quoque $\frac{a}{b}$ rationi $\frac{c}{d}$ æqualis erit. Si namque rationes ſunt æquales, antecedentes earum termini eodem modo ſuos conſequentes continet, aut in illis continentur (§. 31.). *Exponens* autem rationis eſt quantitas modum definiens, quo antecedens continet ſuum conſequentem, vel in illo continetur (§. 7.). Ergo ſi rationes ſunt æquales, earum quoque *exponentes* erunt æquales; & viciſſim, ſi *exponentes* rationum ſunt æquales, ipſæ itidem rationes ſibi mutuo æquales erunt.

S C H O L I O N.

35. Cavendum quammaxime eſt, ne rationum æqualitas, cum ratione æqualitatis confundantur. Quandoquidem ratio æqualitatis exigit, ut termini ſint æquales (§. 13.); at vero æqualitas rationum in eo tantum poſita eſt, ut termini antecedentes eodem modo ſuos conſequentes reſpiciant: quod quidem habetur, quamvis termini, qui inter ſe mutuo comparantur, ſint inæquales.

HYPOTHESIS II.

36. Equalitas rationum ſigno æqualitatis $=$ deſignatur, videlicet ſicuti $a = b$ ſignificat, magnitudinem a æqualem eſſe magnitudini b, ita $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vel $a . b = c . d$ indicat, rationem magnitudinis a ad magnitudinem b æqualem eſſe rationi magnitudinis c ad magnitudinem d. Nonnulli ad rationum æqualitatem indicandam utuntur ſigno ::, ita nimirum ut $a . b :: c . d$ exprimat æqualitatem rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Verum, ut advertit Cl. Volfius (§. 153. *Elem. Arith.*), ſignum ſcientificum $=$ ſigno non ſcientifico :: præferri debet.

DEFINITIO XV.

37. *Partes tam aliquotæ, quam aliquantæ dicuntur ſimiles, quæ eandem ad ſuum totum rationem habent.* Ut ſi ratio partis a ad ſuum totum A æqualis fuerit rationi partis b ad ſuum totum B, partes a, b vocantur ſibi mutuo ſimiles.

DEFINITIO XVI.

38. *Duarum rationum illa vocatur major, cujus antecedens magis ſuum conſequentem continet, vel minus in ſuo conſequente continetur, quam alterius antecedens ſuum conſequentem contineat, vel in illo contineatur.* Sic ratio numeri 10 ad numerum 3 major eſt ratione numeri 5 ad numerum 2, quia antecedens 10 pluries continet conſequentem 3, quam antecedens 5 ſuum conſequentem 2 comprehendat. Etenim numerus 10 *ter* continet totum 3, & unum inſuper illius *trientem*. At vero numerus 5 *bis* dumtaxat complectitur numerum 2 cum una illius parte dimidia. Viciſſim vero ratio numeri 2 ad numerum 5 major eſt ratione numeri 3 ad numerum 10, quia minus antecedens 2 in conſequente 5, quam antecedens 3 in conſequente 10 comprehenditur.

COROLLARIUM I.

39. *Ratio major majorem exponentem habet, & quæ majorem exponentem habet, major eſt.* Cum enim antecedens rationis majoris magis conſequentem contineat, vel minus in illo contineatur, quam alterius rationis antecedens ſuum conſequentem complectitur, vel in illo continetur, major itidem quantitas requiritur, ut major ipſa ratio exprimatur. Et viciſſim ſi hujuſmodi quantitas rationem denominans major fuerit, antecedens rationis ſuum conſequentem magis comprehendet, vel minus in illo continebitur; atque adeo ratio ipſa major erit. Id porro magis adhuc perſpicuum fiet, ſi conſiderare velimus, *exponentem* rationis *majoris inæqualitatis* eſſe numerum unitate majorem (§. 17.); *exponentem* vero rationis *minoris inæqualitatis* eſſe numerum unitate minorem, fractionem ſcilicet proprie ſumtam (§. 17.), eamque majorem eſſe, quo minus illius numerator ab ejuſdem denominatore deficit (*Sym. Alg.* §. 101.). Hinc enim aperte conſtabit, antecedentem terminum rationis *majoris inæqualitatis* magis continere non poſſe ſuum conſequentem, quin magnitudo, quæ majorem hanc continentiam definit, magis, ac magis unitatem ſuperet, ac proinde quin magnitudo ipſa continuo major fiat; & viciſſim quantitatem hanc augeri non poſſe, quin antecedens ſuum conſequentem magis contineat. Conſtabit quoque, antecedentem non poſſe in ſuo conſequente minus comprehendi, quin fractio rationem ipſam denominans minus ab unitate deficiat, atque adeo quin continuo major evadat. Similiter hujuſmodi fractionem non poſſe eſſe majorem, quin antecedens rationis ab illa denominatæ minus in ſuo conſequente comprehendatur, ac propterea quin ipſa ratio major fiat.

COROLLARIUM II.

40. *Omnis ratio majoris inæqualitatis eſt major, & omnis ratio minoris inæqualitatis eſt minor ratione æqualitatis. Et viciſſim omnis ratio major ratione*

Digitized by Google

æqualitatis eſt ratio majoris inæqualitatis, & omnis ratio minor ratione æqualitatis eſt ratio minoris inæqualitatis. Etenim *exponens* rationis *majoris inæqualitatis* eſt major, & *exponens* rationis *minoris inæqualitatis* eſt minor unitate, quæ rationem *æqualitatis* denominat (§. 14.). Et viciſſim *exponens* rationis, quæ ratione *æqualitatis* major eſt, unitatem ſuperat, & *exponens* rationis, quæ ratione *æqualitatis* eſt minor, ab unitate deficit, cum ille major, hic vero minor ſit *exponens* rationis æqualitatis (§. 17.). Ergo &c.

COROLLARIUM III.

41. *Proportio majoris inæqualitatis eo minor, & viciſſim proportio minoris inæqualitatis eo major evadit, quo magis ad rationem æqualitatis accedunt.* Enimvero, quo magis proportio *majoris inæqualitatis* accedit ad rationem *æqualitatis*, eo magis illius *exponens* minuitur, quatenus continuo ſui decremento proximior fit unitati, quam tamen ſemper ſuperat. Contra vero *exponens* rationis *minoris inæqualitatis* eo major efficitur, quo magis ipſa proportio fit proportioni *æqualitatis* propinquior, quatenus ſcilicet in hujuſmodi acceſſu illius *exponens* continuo ſui augmento proximior fit unitati, a qua tamen ſemper deficit. Ratio autem illa major eſt, quæ majorem *exponentem* habet (§. 39.). Ergo &c.

HYPOTHESIS III.

42. Inæqualitas rationum iiſdem plane ſignis, quibus inæqualitas magnitudinum, indicatur. Videlicet ſicuti $a > b$ deſignat, magnitudinem a majorem eſſe magnitudine b, & $a < b$ indicat, magnitudinem a a magnitudine b deficere (*Syn. Alg.* §. 11.), ita $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ſive $a.b > c.d$ ſignificat, rationem magnitudinis a ad magnitudinum b majorem eſſe ratione termini c ad d, & $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ſeu $a.b < c.d$ deſignat, rationem primæ a ad ſecundam b minorem eſſe ratione tertiæ c ad quartam d.

DEFINITIO XVII.

43. *Proportionalitas Geometrica*, quam Græci *analogiam* appellant, *eſt rationum ſimilitudo, ſeu æqualitas.* Videlicet *quatuor magnitudines dicuntur geometrice proportionales, cum ratio prima ad ſecundam ſimilis eſt, ſive æqualis rationi tertiæ ad quartam.* Ut ſi fuerit $a.b = c.d$, quatuor magnitudines a, b, c, d erunt geometrice inter ſe proportionales. Porro prima quatuor magnitudinum proportionalium dicitur *primus antecedens*, ſecunda *primus conſequens*, tertia *ſecundus antecedens*, & quarta *ſecundus conſequens*. Quoniam vero una eademque magnitudo obire ſimul poteſt munus *primi conſequentis*, & *ſecundi antecedentis*, ut cum dicitur, magnitudinem a eſſe ad magni-

gnitudinem *b*, quemadmodum eſt magnitudo *b* ad magnitudinem *c*, ſtat, *proportionalitatem* in tribus tantum terminis poſſe ſubſiſtere.

Corollarium I.

44. *Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, exponens rationis, quam habet prima ad ſecundam, æqualis erit exponenti rationis, quam habet tertia ad quartam*. Et viciſſim, *ſi exponens rationis, quam habet prima ad ſecundam, æqualis fuerit exponenti rationis, quam habet tertia ad quartam, quatuor illæ magnitudines erunt geometrice proportionales.* Etenim rationes æquales habent *exponentes* æquales, & quæ habent *exponentes* æquales, ſunt inter ſe æquales (§. 34.).

Corollarium II.

45. *Si prima quatuor magnitudinum geometrice proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor ſecunda, etiam tertia erit æqualis, vel major, aut minor quarta. Et ſi tertia fuerit æqualis, vel major, aut minor quarta, etiam prima erit æqualis, vel major, aut minor ſecunda.* Eſt enim prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam, ſicuti etiam tertia ad quartam, ut prima ad ſecundam.

Hypothesis IV.

46. Proportionalitas geometrica quatuor magnitudinum *a*, *b*, *c*, *d* hoc modo exprimitur $a . b = c . d$. Hoc enim modo rationum æqualitas, ut ſuperiori loco notavimus, deſignatur.

Definitio XVIII.

47. Proportionalitas vel *diſcreta* eſt, vel *continua*. *Proportionalitas continua eſt, cum ratio ſecundæ magnitudinis ad tertiam diverſa ab ea non eſt, quam habet prima ad ſecundam. Diſcreta vero cum ratio ſecundi termini ad tertium diverſa eſt a ratione primi ad ſecundum. Continua* nimirum eſt proportio numerorum 16. 8. 4. 2. At vero *diſcreta* proportio numerorum 6. 3. 4. 2. In primo enim caſu dumtaxat ſecundus terminus eſt ad tertium, ut primus ad ſecundum. Trium itaque magnitudinum *continuo* proportionalium ſecunda dicitur *media proportionalis*. Quatuor vero magnitudinum *continuo* itidem proportionalium ſecunda, & tertia *duæ mediæ proportionales* nuncupantur.

Hypothesis V.

48. Proportionalitas continua geometrica indicatur præfigendo ſignum $\div$ terminis ipſis continuo inter ſe proportionalibus. Ut ſi proportionales *continua* inter ſe fuerint magnitudines *a*, *b*, *c*, *d* &c. ſcribitur $\div a . b . c . d$. &c.

Moni-

Monitum.

49. Ceterum ubicumque ſit mentio de terminis proportionalibus, *diſcreta* ſemper proportionalitas intelligitur, niſi ly *continuo* expreſſe habeatur.

DEFINITIO XIX.

50. *Magnitudines homologæ, ſive ratione ſimiles, dicuntur illæ, quæ eandem ad alias, quibus comparantur, rationem habent.* Ut ſi ratio magnitudinis a ad magnitudinem b ſimilis fuerit rationi magnitudinis c ad magnitudinem d, magnitudines a, c erunt *homologæ*.

COROLLARIUM.

51. *In omni proportionalitate geometrica termini antecedentes ſunt homologi.* Habent enim eandem rationem ad ſuos conſequentes.

DEFINITIO XX.

52. *Ratio ex aliis rationibus compoſita vocatur illa, cujus exponens eſt factum ex aliarum rationum exponentibus inter ſe multiplicatis.* Ut ſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & *exponens* rationis $\frac{c}{d}$ fuerit n, ratio, cujus *exponens* eſt productum mn, erit compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

SCHOLION I.

53. Ut igitur determinetur ratio ex datis quibuſcumque rationibus compoſita, quærendi ſunt illarum *exponentes*, iique inter ſe mutuo ſunt multiplicandi. Quod enim hinc fit productum, erit *exponens* rationis quæſitæ, ejuſque indolem palam efficiet.

SCHOLION II.

54. Quemadmodum rationum multiplicatio *exponentium* multiplicatione peragitur, ita ipſarum additio, ſubtractio, & diviſio additione, ſubtractione, & diviſione *exponentium* abſolvuntur. Ut ſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m, & *exponens* rationis $\frac{c}{d}$ fuerit n, ratio ex illarum additione conſurgens

ea

ea erit, cujus *exponens* eſt $m+n$. Quæ autem ex ſubtractione rationis $\frac{c}{d}$ a ratione $\frac{a}{b}$ emergit, erit illa, cujus *exponens* eſt $m-n$. Quæ demum naſcitur ex diviſione rationis $\frac{a}{b}$ per rationem $\frac{c}{d}$, ea erit, cujus *exponens* eſt *quotus* $\frac{m}{n}$.

DEFINITIO XXI.

55. *Ratio* duplicata *dicitur illa, quæ ex duabus*: triplicata, *quæ ex tribus*: quadruplicata, *quæ ex quatuor rationibus ſimilibus inter ſe multiplicatis conſurgit, atque ita deinceps*. Sic magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *duplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n, ſi ratio $\frac{a}{b}$ fuerit compoſita ex ratione $\frac{m}{n}$ ducta in ſeipſam. Erit vero a ad b in ratione *triplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n, ſi ratio $\frac{a}{b}$ fuerit compoſita ex tribus rationibus rationi $\frac{m}{n}$ ſimilibus in ſe invicem ductis, & ſic deinceps.

COROLLARIUM I.

56. *Duæ magnitudines erunt inter ſe in ratione aliqua* duplicata, *ſi ea fuerit ipſarum ratio, ut illius exponens ſit factum ex data rationis exponente multiplicato per ſeipſum. Erunt in ratione aliqua* triplicata, *ſi fuerint in ea ratione, cujus exponens ſit productum ex data rationis exponente per exponentem ejuſdem duplicata multiplicato* &c. Ut ſi *exponens* rationis $\frac{m}{n}$ ponatur d, ratio $\frac{a}{b}$ erit *duplicata* rationis $\frac{m}{n}$, ſi fuerit $\frac{a}{b} = dd$; erit *triplicata* ejuſdem $\frac{m}{n}$, ſi fuerit $\frac{a}{b} = ddd$, & ſic de ceteris. Rationum namque compoſitio *exponentium* multiplicatione abſolvitur (§ 52.).

COROLLARIUM II.

57. Hinc *exponens rationis* duplicatæ *eſt* quadratum; *rationis* triplicatæ *eſt* cubus, *rationis* quadruplicatæ *eſt* quadrato-quadratum &c. *exponentis rationis datæ*.

SCHO-

SCHOLION.

58. Si notus idcirco fuerit valor illius quantitatis, quæ datam rationem denominat, valor quoque ejuſdem rationis *duplicatæ*, *triplicatæ* &c. facili negotio determinabitur. Id enim multiplicatione cogniti valoris obtinebitur. Ut ſi *exponens* datæ rationis ponatur $d=3$, *exponens* illius rationis, ſcilicet *triplæ duplicata* erit 9, ejuſdem *triplicatæ* erit 27, & ſic deinceps.

DEFINITIO XXII.

59. *Ratio* ſubduplicata datæ rationis *vocatur illa, ex qua ducta in ſeipſam data ratio efficitur:* ſubtriplicata, *ex qua multiplicata per ſeipſam duplicatam ratio data conſurgit, atque ita deinceps*. Ut ſi ex ratione $\frac{a}{b}$ multiplicata per ſeipſam fiat ratio $\frac{m}{n}$; ſi ex eadem $\frac{a}{b}$ ducta in ſeipſam *duplicatam* conſurgit ratio $\frac{r}{s}$; & ſi ex ipſa $\frac{a}{b}$ multiplicata per ſeipſam *triplicatam* oriatur ratio $\frac{x}{y}$, magnitudo a erit ad magnitudinem b in ratione *ſubduplicata* magnitudinis m ad magnitudinem n; in ratione *ſubtriplicata* magnitudinis r ad magnitudinem s; in ratione *ſubquadruplicata* magnitudinis x ad magnitudinem y, &c.

COROLLARIUM I.

60. *Duæ magnitudines erunt inter ſe in ratione* ſubduplicata *alicujus rationis datæ, ſi quantitas, quæ illarum rationem denominat, ducta in ſeipſam exponentem datæ rationis efficiat: erunt in ratione aliqua* ſubtriplicata, *ſi illa eadem quantitas multiplicata per ſuum* quadratum *datæ rationis exponentem producat, & ſic deinceps*. Ut ſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ fuerit m; ratio $\frac{a}{b}$ erit *ſubduplicata* rationis $\frac{c}{d}$, ſi ponatur $\frac{c}{d}=mm$; erit *ſubtriplicata* rationis $\frac{x}{y}$, ſi ponatur $\frac{x}{y}=mmm$ &c.

COROLLARIUM II.

61. Hinc *exponens rationis* ſubduplicatæ *eſt radix* quadrata, *rationis* ſubtriplicatæ *eſt* radix cubica, *rationis* ſubquadruplicatæ *eſt* radix quadrato-quadrata &c. *exponentis illius rationis, cujus illa eſt ſubduplicata, ſubtriplicata* &c.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION I.

62. Si notus propterea fuerit valor quantitatis, quæ datam rationem exprimit, per extractionem radicis *quadratæ* ex illa quantitate innoteſcet valor *exponentis* ejuſdem rationis *ſubduplicatæ*; per extractionem radicis *cubicæ* palam fiet valor *exponentis* ejuſdem rationis *ſubtriplicatæ* &c.

SCHOLION II.

63. Cavendum quammaxime eſt, ne ratio *duplicata* cum ratione *dupla*, ratio *triplicata* cum ratione *tripla* &c., ſicuti etiam ratio *ſubduplicata* cum ratione *ſubdupla*, ratio *ſubtriplicata* cum ratione *ſubtripla* &c. confundantur. Etenim ratio *dupla* in eo poſita eſt, ut antecedens ſuum conſequentem bis contineat. At vero ratio *duplicata* rationem compoſitam ex data ratione in ſeipſam ducta deſignat, quæ ſunt toto cœlo diverſa. Idipſum de aliis dicito.

DEFINITIO XXIII.

64. *Æquationis nomine intelliguntur duæ quantitates Algebricæ, ſive ſimplices illæ ſint, ſive complexæ, inter quas ſignum æqualitatis* $=$ *reperitur.* Videlicet *æquationes* vocantur $a=b$, $ab+de=mr-nx$.

DEFINITIO XXIV.

65. *Membra æquationis ſunt illæ quantitates, quas inter habetur ſignum æqualitatis* $=$. Sic quantitates $ab+de$, $mr-nx$ ſunt membra *æquationis* $ab+de=mr-nx$, *primum* quidem, quod ſignum $=$ præcedit, ſcilicet $ab+de$, *ſecundum* vero, quod ſignum ipſum conſequitur, nempe $mr-nx$.

Modi argumentandi.

I.

66. *Ratio inverſa* eſt, cum ſumitur conſequens proportionis, veluti antecedens & ad ſuum antecedentem, ut ad conſequentem refertur. Nimirum ſi fuerit $A.a=B.b$, arguitur invertendo, cum demonſtratur eſſe $a.A=b.B$.

SCHOLION.

67. Ex eo, quod habeatur $A.\ a=B.b$, arguunt nonnulli, eſſe $b.B=a.A$, idque *permutando* appellant. Verum cum, facta terminorum inverſione, mutetur tantum locus rationum æqualium, ſpecialis arguendi modus is haudquaquam videtur.

II.

68. *Alterna ratio* eſt, cum antecedens ad antecedentem, & conſequens ad conſequentem refertur. Ut ſi fuerit $A.\ a = B.\ b$, arguitur *alternando*, cum probatur eſſe $A.\ B = a.\ b$.

III.

69. *Compoſitio rationis* fit, cum ſumma ex antecedente, & conſequente ad conſequentem refertur. Ut ſi ponatur $A.\ a = B.\ b$, arguitur *componendo*, cum oſtenditur, eſſe $A + a.\ a = B + b.\ b$.

IV.

70. *Diviſio rationis* tunc fieri dicitur, cum exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, cum ipſo conſequente comparatur. Sic facta hypotheſi, ut ſit $A.\ a = B.\ b$, arguitur *dividendo*, ſi oſtendatur, eſſe $A - a.\ a = B - b.\ b$.

V.

71. *Converſio rationis dividendo* tunc fit, cum exceſſus antecedentis ſupra conſequentem ad ipſum antecedentem refertur. Nimirum ſi fuerit $A.\ a = B.\ b$, arguitur *dividendo* per *converſionem rationis*, cum oſtenditur $A - a.\ A = B - b.\ B$.

VI.

72. *Converſio rationis componendo* eſt, cum antecedens, & conſequens ſimul uniti, unius inſtar, ad antecedentem referuntur. Si nimirum fuerit $A.\ a = B.\ b$, arguitur *componendo* per *converſionem rationis*, cum oſtenditur, eſſe $A + a.\ A = B + b.\ B$.

VII.

73. *Ratio ex æqualitate* eſt ſumptio extremorum per ſubductionem mediorum. Videlicet ſi fuerint ex una parte tres magnitudines A, B, C, & ex alia totidem aliæ a, b, c, arguitur ex *æqualitate rationis*, cum demonſtratur prima in uno ordine eſſe ad ultimam in eodem ordine, ut eſt prima in altero ordine ad ultimam ejuſdem. Verum cum magnitudines iſtæ debeant eſſe proportionales, idque dupliciter contingere poſſit, nimirum *ordinate*, & *perturbate*, duo caſus diſtinguendi ſunt, in quibus ex *rationis æqualitate* poteſt argui, videlicet cum illarum ratio eſt *ordinata*, & cum ratio ipſa eſt *perturbata*.

Prî-

Primus caſus.

74. *Ordinata proportio* inter plures magnitudines diverſum ordinem conſtituentes tunc haberi dicitur, cum prima eſt ad ſecundam in uno ordine, ut eſt prima ad ſecundam in altero ordine; & ſecunda ad tertiam in priori, ut eſt ſecunda ad tertiam in poſteriori, & ſic deinceps. Erit nimirum *ordinata proportio* in duplici hac magnitudinum ſerie

$$A,\ B,\ C,\ D$$
$$a,\ b,\ c,\ d$$

ſi fuerit $A . B = a . b$, $B . C = b . c$, $C . D = c . d$. Itaque arguitur ex *æqualitate rationis* in *proportione ordinata*, cum oſtenditur, eſſe $A . D = a . d$.

Secundus caſus.

75. *Ratio perturbata* plurium magnitudinum diverſum ordinem conſtituentium tunc habetur, cum penultima eſt ad ultimam in uno ordine, ut eſt prima ad ſecundam in altero ordine; antepenultima ad penultimam in uno, ut eſt ſecunda ad tertiam in altero, & ſic deinceps, donec prima in poſteriori ordine ſit ad ſecundam, ut in priori eſt penultima ad ultimam. Sic *perturbata* eſt *proportio* magnitudinum in hac duplici ſerie

$$A,\ B,\ C,\ D$$
$$a,\ b,\ c,\ d$$

Si habeatur $A . B = c . d$, $B . C = b . c$, $C . D = a . b$. Arguitur ergo ex *æqualitate rationis* in *proportione perturbata*: cum demonſtratur, eſſe $A . D = a . d$.

Axiomata.

I.

Rationes, quæ eidem, vel æqualibus ſunt æquales, inter ſe quoque ſunt æquales.

76. Ut ſi rationes $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ æquales fuerint eidem rationi $\frac{e}{f}$, vel rationibus æqualibus $\frac{m}{p}, \frac{n}{q}$, inter ſe quoque æquales erunt. Si namque ſpectentur harum rationum *exponentes*, erunt *exponentes* rationum $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ æquales *exponenti* rationis $\frac{e}{f}$ ſicuti etiam *exponentibus* rationum $\frac{m}{p}, \frac{n}{q}$ (§.34.)

Er-

Ergo *exponentes* rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ erunt etiam inter ſe æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Rationes autem illæ ſunt æquales inter ſe, quæ æquales *exponentes* habent (§. 34.). Ergo rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ erunt æquales.

II.

Cui una duarum rationum æqualium æqualis eſt, altera quoque earundem eſt æqualis.

77. Videlicet ſi rationi $\frac{m}{n}$ æqualis fuerit una $\frac{a}{b}$ duarum rationum æqualium $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ altera quoque ipſarum $\frac{c}{d}$ erit eidem $\frac{m}{n}$ æqualis. Etenim ſtante hypotheſi, *exponentes* etiam duarum $\frac{m}{n}$, $\frac{c}{d}$ erunt æquales.

III.

Ratio, quæ uni duarum rationum æqualium æqualis eſt, alteri quoque earundem eſt æqualis.

78. Poſita nempe æqualitate duarum rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ſi ratio $\frac{m}{n}$ æqualis fuerit rationi $\frac{a}{b}$, rationi quoque $\frac{c}{d}$ æqualis erit. Sunt enim ipſarum *exponentes* inter ſe æquales.

IV.

Rationes, quæ rationibus inæqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt inæquales.

79. Si nimirum ratio $\frac{a}{b}$ æqualis fuerit rationi $\frac{m}{n}$, & ratio $\frac{c}{d}$ rationi $\frac{p}{q}$; fuerit autem ratio $\frac{m}{n}$ major ratione $\frac{p}{q}$, etiam ratio $\frac{a}{b}$, major erit ratione $\frac{c}{d}$. Sicuti namque *exponens* rationis $\frac{m}{n}$ major eſt per hypotheſim *exponente* rationis $\frac{p}{q}$ (§. 39.), *exponens* quoque rationis $\frac{a}{b}$ *expo-*

nentem rationis $\frac{c}{d}$ ſuperabit (*Syn. Alg.* §. 260.), atque adeo ratio $\frac{a}{b}$ ratione $\frac{c}{d}$ major erit (§. 39.).

Regulæ fundamentales *PROPORTIONUM.*

PROPOSITIO I.

Si eadem magnitudo ducatur ſeorſim in æquales, aut æquales per eandem, vel per æquales multiplicentur, producta, quæ hinc fiunt, erunt æqualia.

80. Eadem magnitudo a ſeorſim multiplicetur per æquales b, b, & fiant producta ab, ab. Æquales itidem magnitudines d, d ducantur in eandem e, aut in æquales m, m, & fiant producta in priori caſu de, de, in poſteriori dm, dm. Dico, omnia hujuſmodi producta eſſe *reſpective* inter ſe æqualia, videlicet eſſe $ab = ab$, $de = de$, $dm = dm$.

Demonſtratio.

Patet quoad omnes caſus ex ipſis terminis, ut jure proinde inter axiomata recenſeri poſſit.

PROPOSITIO II.

Si eadem magnitudo per æquales ſeorſim, vel æquales per eandem, aut per æquales dividantur, quoti erunt æquales.

81. Magnitudo a dividatur ſeorſim per æquales b, b ſitque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{b} = n$. Æquales quoque magnitudines d, d dividantur per eandem e, aut per æquales f, f, ſitque $\frac{d}{e} = p$, $\frac{d}{e} = q$, $\frac{d}{f} = x$, $\frac{d}{f} = y$. Dico, eſſe $m = n$, $p = q$, $x = y$.

De-

Demonſtratio.

Hæc itidem, ut præcedens, ex terminis manifeſta eſt.

PROPOSITIO III.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale producto mediarum.

82. Sit $a . b = c . d$. Dico, productum ad extremarum a, d æquale eſſe producto bc mediarum b, c.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a . b = c . d$, *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ æqualis, ſeu idem erit cum *exponente* rationis $\frac{c}{d}$ (§. 34.), videlicet ſi ponatur $\frac{a}{b} = m$, erit etiam $\frac{c}{d} = m$. Eſt autem $bm = a$, $dm = c$ (§. 11.). Ergo erit $bm \times d = a \times d$, ſicuti etiam $dm \times b = c \times b$, ſive $bmd = ad$, $dmb = cb$ (§. 80.). Manifeſtum porro eſt, eſſe $bmd = dmb$ (*Syn. Alg.* §. 40.). Ergo erit quoque $ad = cb$ (*Syn. Alg.* §. 159.). Itaque ſi fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines continuo geometrice proportionales, productum extremarum erit æquale quadrato mediæ.

83. Si nimirum fuerit $\div a . b . c$, erit $ac = bb$. Si namque magnitudo media b bis ſumatur, erit $a . b = b . c$, atque adeo $ac = bb$ (§. 82.).

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus productum extremarum ſit æquale producto mediarum, illæ erunt geometrice proportionales.

84. Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus productum ad extremarum a, d ſit æquale producto bc mediarum b, c. Dico, eſſe $a . b = c . d$.

Demonſtratio.

Eſto namque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, adeoque $bm = a$, $dn = c$ (§.11.). Multiplicatis ergo membris æquationis $bm = a$ per eandem quantitatem d, ſicuti etiam membris æquationis $dn = c$ per eandem quantitatem b, erit $bmd = ad$, $dnb = cb$ (§.80.). Eſt autem per hypotheſim $ad = bc$. Ergo erit ſimiliter $bmd = dnb$ (*Syn. Alg.* §.259.); ac proinde $\frac{bmd}{bd} = \frac{dnb}{bd}$ (§.81.). Perſpicuum porro eſt, eſſe $\frac{dmb}{bd} = m$, $\frac{dnb}{db} = n$ (*Syn. Alg.* §.72.). Ergo erit $m = n$ (§.81.) Quotus autem m eſt ex hypotheſi *exponens* rationis $\frac{a}{b}$, & quotus n *exponens* rationis $\frac{c}{d}$. Ergo erit $a . b = c . d$ (§.44.). Igitur ſi fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines, ex quibus productum extremarum ſit æquale quadrato mediæ, erunt illæ continuo inter ſe geometrice proportionales.

85. Erit nempe $\dot{\because}$ $a . b . c$, ſi fuerit $ac = bb$. Quandoquidem hac facta hypotheſi, erit $a . b = b . c$ (§.84.); ac proinde $\dot{\because}$ $a . b . c$.

SCHOLION.

86. Hiſce propoſitionibus innititur *regula trium* tam *directa*, quam *inverſa*, quæ ob uſum ampliſſimum merito optimoque jure *aurea* nuncupatur. In eo igitur regula trium *directa* poſita eſt, ut *tribus datis magnitudinibus, quarta inveniatur, ad quam ita ſe habet tertia, ut ſe habet illarum prima ad ſecundam*. Regula vero trium *inverſa* in eo conſiſtit, ut *datis tribus magnitudinibus, quarta inveniatur, cujus ratio ad ſecundam ab ea non ſit diverſa, quam habet earundem prima ad tertiam.*

PROBLEMA I.

Datis tribus magnitudinibus, quartam directa proportionalem invenire.

87. Datæ ſint tres magnitudines a, b, c. Quartam invenire oporteat, ad quam ita ſe habeat tertia c, ut ſe habeat prima a ad ſecundam b.

Reſolutio.

Multiplicetur ſecunda b per tertiam c, & factum bc per primam a dividatur. Erit $\frac{bc}{a}$ quarta proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Etenim ſi ponatur $\frac{bc}{a} = d$, erit $ad = bc$ (§. 11.). Ergo $a.b = c.d$ (§. 84.

COROLLARIUM.

88. *Poſitis igitur quatuor magnitudinibus Geometrice proportionalibus, quarta æquabit quotum facti ex ſecunda in tertiam per illarum primam diviſi; prima vero æqualis erit quoto facti ex ſecunda in tertiam per quartam diviſi.*

SCHOLION.

89. Hinc oſtenditur artificium alibi traditum (*Syn. Alg.* §. 129.) convertendi fractionem in aliam dati nominis. Id enim per inventionem magnitudinis, ad quam ita ſe habeat denominator fractionis quæſitæ, ut ſe habet denominator fractionis datæ ad ſuum numeratorem.

PROBLEMA II.

Datis tribus magnitudinibus, quartam reciproce proportionalem invenire.

90. Datis tribus magnitudinibus a, b, c, quartam invenire oporteat, quæ ſit ad ſecundam b, ut eſt prima a ad tertiam c.

Reſolutio.

Factum ab ex ductu primæ a in ſecundam b dividatur per tertiam c. Quotus $\frac{ab}{c}$ erit quarta quæſita.

Demonſtratio.

Si namque ponatur $\frac{ab}{c} = x$, erit $cx = ab$ (§. 11.); ac proinde $a \cdot c = x \cdot b$ (§. 84.)

PROBLEMA III.

Datis duabus magnitudinibus mediam Geometrice proportionalem invenire.

91. Inter duas a, b mediam Geometrice proportionalem invenire oporteat.

Reſolutio.

Facto ab ex ipſis magnitudinibus extrahatur radix quadrata (*Syn. Alg.* §. 171.). Erit $\sqrt{ab}$ media quæſita.

Demonſtratio.

Etenim ſi fiat $\sqrt{ab} = x$, erit $xx = ab$, atque adeo $\div a . x . b$ (§. 85.).

PROBLEMA IV.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam Geometrice proportionalem invenire.

92. Datis duabus magnitudinibus a, b, invenire oporteat tertiam Geometrice proportionalem.

Reſolutio.

Quadratum bb ſecundæ b dividatur per primam a. Quotus $\frac{bb}{a}$ erit tertia proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Quandoquidem ſi ponatur $\frac{bb}{a} = d$, erit $ad = bb$ (*Syn. Alg.* §. 65.). Ergo $\div a . b . d$ (§. 85.).

PRO-

PROPOSITIO V.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, vel æquales multiplicentur, producta erunt directe inter ſe, ut ipſæ magnitudines.

93. Duæ inæquales magnitudines a, b multiplicentur per eandem d, vel per æquales, d, d, duoque fiant producta ad, bd. Dico, eſſe $ad.bd = a.b$.

Demonſtratio.

Eſt enim $adb = bda$ (*Syn. Alg.* §. 40.). Ergo erit $ad.\ bd = a.\ b$ (§. 84.) Itaque ſi duæ &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VI.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, vel per æquales dividantur, quoti erunt directe, ut ipſæ magnitudines diviſæ.

94. Duæ inæquales magnitudines a, b dividantur per eandem d, vel per æquales d, d, ſitque $\frac{a}{d} = m$, $\frac{b}{d} = n$. Dico, eſſe $m.\ n = a.\ b$.

Demonſtratio.

Stante namque hypotheſi, erit $dm = a$, $dn = b$ (§. 11.), ac proinde $dnm = na$, $dmn = mb$, (§. 80.). Eſt autem $dmn = dnm$ (*Syn. Alg.* §. 40.). Ergo erit etiam $mb = na$ (*Syn. Alg.* §. 259.); atque adeo $m.n = a.b$ (§. 84.). Itaque ſi duæ inæquales magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Si duæ inæquales magnitudines per eandem, aut per æquales multiplicentur, vel dividantur, facta in primo caſu, quoti in ſecundo erunt inæquales.

95. Sunt enim tam facta, quam quoti, ut ipſæ magnitudines.

Digitized by Google

PROPOSITIO VII.

Si eadem magnitudo per duas inæquales dividatur, quoti erunt ſuis diviſoribus reciproce proportionales.

96. Magnitudo a dividatur primo per b, deinde per c, ſitque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$. Dico, eſſe $m, n = c. b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit per hypotheſim $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$; erit $bm = a$, $cn = a$ (§. 11.); atque adeo $bm = cn$ (*Syn. Alg.* §. 259.). Eſt autem bm productum extremarum m, b, & cn eſt productum mediarum n, c. Ergo erit $m.n = c.b$ (§. 84.). Itaque ſi eadem magnitudo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Quotus magnitudinis diviſa per majorem terminum eſt minor quotiente ejuſdem magnitudinis per minorem diviſa.

97. Ut ſi fuerit $b < c$, erit $m < n$. Oſtenſum eſt enim, eſſe $m.n = c.b$.

PROPOSITIO VIII.

Si fuerint quatuor magnitudines, quarum prima majorem rationem habeat ad ſecundam, quam tertia ad quartam, productum extremarum majus erit producto mediarum. Si vero ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, productum extremarum erit minus producto mediarum.

I.

98. Eſto $a.b > c.d$. Dico, productum ad extremarum a, d majus eſſe producto bc mediarum b, c.

Do-

Demonſtratio.

Quoniam eſt $a.\ b < c\ d$, *exponens* rationis $\frac{a}{b}$ major erit *exponente* rationis $\frac{c}{d}$ (§ 39.). Ponatur ergo $\frac{a}{b} = m + n$, $\frac{c}{d} = m$. Igitur erit $bm + bn = a$, $dm = c$ (§. 11.). Multiplicatis idcirco membris æquationis $bm + bn = a$ per quantitatem d, ſicuti etiam membris æquationis $dm = c$ per quantitatem b, erit $bmd + bnd = ad$, $dmb = cb$ (§. 80.). Eſt autem $bmd + bnd > dmb$ (*Syn. Alg.* §. 257.); cum ſit $bmd = dmb$ (*Syn. Alg.* §. 258.). Ergo erit quoque $ad > cb$ (*Syn. Alg.* §. 260.).

I I.

99. Modo autem ſit $a.\ b < c.\ d$. Dico, eſſe $ad\ bc$, productum ſcilicet extremarum a producto mediarum deficere.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti, ſi nimirum ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d}\ m + n$. Erit enim $dm + dn = c$, & $bm = a$; ac proinde $ad < bc$; cum jam ſit $bmd < dmb + dnb$, ut patet. Itaque ſi fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO IX.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus productum extremarum ſit majus producto mediarum, prima habebit majorem rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam. Si vero productum extremarum fuerit minus producto mediarum, ratio prima ad ſecundam erit minor ratione tertia ad quartam.

I.

100. Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus productum ad extremarum a, d ſit majus producto bc mediarum b, c. Dico eſſe $a.b > c.\ d$.

Po-

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$; atque adeo $bm = a$, $dn = c$ (§. 11.). Igitur multiplicatis membris æquationis $bm = a$ per eandem quantitatem d, & membris æquationis $dn = c$ per quantitatem b, erit $bmd = ad$, $dnb = cb$ (§. 80.). Eſt autem per hypotheſim $ad > bc$. Ergo erit quoque $bmd > dnb$ (*Syn. Alg.* §. 260.). Conſtat autem, eſſe $\frac{bmd}{bd} = m$, $\frac{dnb}{bd} = n$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Igitur erit $m > n$ (§. 94.). Quotus autem m denominat rationem $\frac{a}{b}$, & quotus n rationem $\frac{c}{d}$ per hypotheſim. Ergo erit $a.\, b > c.\, d$ (§. 38.).

II.

101. Viciſſim vero productum ad extremarum a, d ſit minus producto bc mediarum b, c. Dico, eſſe $a.\, b < c.\, d$.

Demonſtratio.

Coincidit vero præcedenti. Quandoquidem facta eadem hypotheſi ut ſit $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, erit $bdm < dnb$, quemadmodum tunc eſt $ad < bc$. Ergo erit quoque $m < n$; ac proinde $a.\, b < c.\, d$. Itaque ſi fuerint quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

THEORIA

Proportionis, & proportionalitatis Geometricæ.

THEOREMA I.

Magnitudines æquales eandem ad eundem, vel æquales terminos rationem habent; & viciſſim quæ eandem ad eundem, vel æquales terminos rationem habent, ſunt æquales.

102. Sint duæ magnitudines æquales a, b. Dico, eandem eſſe utriuſque rationem ad eundem, vel æquales terminos x, x, nimirum eſſe $a.\, x = b.\, x$.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit per hypotheſim $a=b$, ſi ponatur $\frac{a}{x}=m$, erit etiam $\frac{b}{x}=m$ (§. 81.). Ergo erit quoque $a.\,x=b.\,x$ (§. 44.). Eſt enim quotus m *exponens* utriuſque rationis $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$ (§. 8.).

II.

103 Viciſſim magnitudines a, b eandem rationem habeant ad eundem, vel æquales terminos x, x, eſto nimirum $a.\,x=b.\,x$. Dico, eſſe $a=b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit per hypotheſim $a.\,x=b.\,x$, ſi ponatur $\frac{a}{x}=m$, erit etiam $\frac{b}{x}=m$ (§. 44); ac proinde $xm=a$, $xm=b$ (§. 11.). Ergo erit $a=b$ (*Syn. Alg.* §. 259.). Magnitudines igitur æquales &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Fractiones illæ ſunt inter ſe æquales, quæ eandem ad ſuum denominatorem rationem habet.

104. Fractiones nimirum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ æquales erunt inter ſe, ſi ratio numeratoris a ad denominatorem b diverſa ab ea non fuerit, quam habet numerator c ad denominatorem d. Cum enim fractio quæcunque ſit ad unitatem, ut ipſius numerator ad ſuum denominatorem, erit $\frac{a}{b}.\,1=a.\,b$, & $\frac{c}{d}.\,1.=c.\,d$ (§. 32.). Eſt autem per hypotheſim $a.\,b=c.\,d$. Ergo erit $\frac{a}{b}.\,1=\frac{c}{d}.\,1$ (§. 76.); atque adeo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (§. 103.).

SCHO-

S C H O L I O N.

105. Hinc manifeſtum efficitur, quod diximus in *Algebræ Synopſi* §. 107., videlicet *fractiones eſſe ejuſdem valoris, ſeu æquales inter ſe, cum earum numeratores ſunt eadem pars, vel eædem partes ſuorum denominatorum*. Quandoquidem numeratores fractionum eſſe eandem partem, vel eaſdem partes ſuorum denominatorum idem eſt omnino, ac ipſarum numeratores eandem ad ſuos denominatores rationem habere (§. 2.).

C O R O L L A R I U M II.

Illæ fractiones ſunt æquales inter ſe, quarum numeratores in mutuos denominatores ducti, producta æqualia efficiunt.

106. Æquales nempe erunt inter ſe duæ fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ſi factum ex multiplicatione numeratoris a fractionis $\frac{a}{b}$ per denominatorem d fractionis $\frac{c}{d}$, ſcilicet ad, fuerit æquale producto cb, quod oritur ex ductu numeratoris c fractionis $\frac{c}{d}$ in denominatorem b fractionis $\frac{a}{b}$. Etenim ſi fuerit $ad = bc$, erit $a.\ b = c.\ d$ (§. 84.). Ergo erit quoque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§. 104.).

S C H O L I O N.

107. Hinc patet methodus dignoſcendi, an duæ fractiones ſint æquales inter ſe, num vero inæquales.

C O R O L L A R I U M III.

Si duo cujuſvis fractionis termini per eandem quantitatem multiplicentur, fractio ex hiſce productis facta ejuſdem cum illa valoris erit.

108. Ut ſi termini a, b fractionis $\frac{a}{b}$ multiplicentur per eandem quantitatem d, & ex productis ad, bd fiat fractio $\frac{ad}{bd}$, hæc erit ejuſdem valoris cum fractione $\frac{a}{b}$. Conſtat enim, eſſe $ad.\ bd = a.b$ (§. 93.). Ergo erit $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ (§. 104.

SCHO-

SCHOLION.

109. Ex hoc patet generalis demonſtratio reductionis fractionum diſſimilium ad idem nomen. In hujuſmodi namque reductione termini fractionis per eandem quantitatem multiplicantur (*Syn. Alg.* §. 116.).

COROLLARIUM IV.

Si duo cujuſvis fractionis termini per eandem quantitatem dividantur, fractio ex quotientibus facta ejuſdem cum illa valoris erit.

110. Videlicet ſi termini a, b fractionis $\frac{a}{b}$ dividantur per eandem quantitatem c, ita ut ſit $\frac{a}{c} = d$, $\frac{b}{c} = e$, & ex quotis d, e fiat fractio $\frac{d}{e}$, erit $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$. Perſpicuum namque cum ſit, eſſe $d . e = a . b$ (§. 94.), res quoque perſpecta erit, eſſe $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$ (§. 104.).

SCHOLION.

111. Huic propoſitioni innititur artificium alibi traditum (*Syn. Alg.* §. 135.) reducendi fractionem quamcumque ad minimos terminos. Conſtat enim, illud in eo totum poſitum eſſe, ut termini datæ fractionis per maximam communem menſuram dividantur.

THEOREMA II.

Eadem magnitudo eandem ad æquales terminos rationem habet. Et viciſſim illæ magnitudines ſunt æquales inter ſe, ad quas eadem magnitudo eandem habet rationem.

112. Eadem magnitudo a referatur ad binas æquales b, c. Dico, eſſe $a . b = a . c$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $b = c$, ſi ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$, erit $m = n$ (§. 81.). Sunt autem quoti m, n *exponentes* rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ (§. 8.). Ergo erit $a . b = a . c$ (§. 34.).

Digitized by Google

II.

113. Viciſſim magnitudo a eandem habeat rationem ad magnitudines b. c. Dico eſſe $b=c$.

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit per hypotheſim $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$, ſi ponatur $\frac{a}{b}=m$, erit etiam $\frac{a}{c}=m$ (§.34.). Eſt autem $bm=a$, $cm=a$ (§.11.). Ergo erit $bm=cm$ (*Syn. Alg.* §.259.). Conſtat autem, eſſe $\frac{bm}{m}=b$, $\frac{cm}{m}=c$ (*Syn. Alg.* §.72.) Igitur erit $b=c$ (§.81.). Eadem itaque magnitudo &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA III.

Major magnitudo majorem, quam minor, ad eundem terminum rationem habet; & qua majorem ad eundem terminum rationem habet, major eſt.

I.

114. Magnitudo a ſit major magnitudine b. Utraque autem ad magnitudinem d referatur. Dico, eſſe $a.d>b.d$.

Demonſtratio.

Eſto $\frac{a}{d}=m$, $\frac{b}{d}=n$. Erit $m.n=a.b$ (§.94.). Eſt autem $a>b$ per hypotheſim. Ergo erit etiam $m>n$ (§.45.). Quotus porro m eſt *exponens* rationis $\frac{a}{d}$, & quotus n rationis $\frac{b}{d}$ (§.8.). Ergo erit $a.d>b.d$. (§.39.)

II.

115. Viciſſim vero ſit $a.d>b$. Dico eſſe $a>b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a.d>b.d$, ſi ponatur $\frac{a}{d}=m$; $\frac{b}{d}=n$, erit $m>n$ (§.39.):

atque

atque adeo $md > nd$ (§. 93.). Eſt autem $md = a$, $nd = b$ (§. 11.). Ergo erit quoque $a > b$ (*Syn. Alg.* §. 260.). Major itaque magnitudo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Illa fractio eſt major, cujus numerator majorem ad ſuum denominatorem rationem habet.

116. Videlicet fractio $\frac{a}{b}$ major erit fractione $\frac{c}{d}$, ſi fuerit $a.b > c.d$. Enimvero, cum ſit $\frac{a}{b}.1 = a.b$, & $\frac{c}{d}.1 = c.d$ (§. 32.), non poteſt eſſe $a.b > c.d$, niſi etiam ſit $\frac{a}{b}.1 > \frac{c}{d}.1$ (§. 79.) atque adeo quia itidem habeatur $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (§. 115.).

COROLLARIUM II.

Fractio illa eſt major, cujus numerator ductus in alterius fractionis denominatorem majus productum efficit.

117. Fractio nimirum $\frac{a}{b}$ major erit fractione $\frac{c}{d}$, ſi factum ad ex multiplicatione numeratoris a per denominatorem d majus fuerit producto cb, quod ex multiplicatione numeratoris c per denominatorem b efficitur. Quandoquidem, ſi fuerit $ad > cb$, erit $a.b > c.d$ (§. 100.). Non poteſt autem eſſe $a.b > c.d$, quin ſit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (§. 116.). Ergo ſi fuerit $ad > cb$, erit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

SCHOLION.

118. Datis idcirco duabus fractionibus diſſimilibus, facile erit dignoſcere, an æquales ſint inter ſe, num vero inæquales; & ſi inæquales, quænam illarum ſit major.

THE-

THEOREMA IV.

Eadem magnitudo minorem ad majorem, quam ad minorem terminum rationem habet. Et viciſſim terminus ille major eſt, ad quem eadem magnitudo minorem rationem habet.

I.

119. Eadem magnitudo a ad inæquales b, c referatur ſitque $b > c$. Dico, eſſe $a . b < a . c$.

Demonſtratio.

Eſto namque $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$. Igitur erit $m . n = c . b$ (§. 96.). Eſt autem per hypotheſim $c < b$. Ergo erit etiam $m < n$ (§. 45.). Quoti autem m, n ſunt exponentes rationum $a \frac{a}{b}, \frac{a}{c}$ (§. 8.). Ergo erit $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$, ſive $a . b < a . c$ (§. 39.).

I I.

120. Viciſſim vero ſit $a . b < a . c$. Dico, eſſe $b > c$.

Demonſtratio.

Quoniam eſt per hypotheſim $a . b < a . c$, ſi ponatur $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{c} = n$, erit $m < n$ (§. 39.). Eſt autem $m . n = c . b$ (§. 96.). Ergo erit $c < b$, ſive $b > c$. Eadem itaque magnitudo &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam invertendo, proportionales erunt.

121. Eſto $A . b = B . b$. Dico, etiam *invertendo* eſſe $a . A = b . B$.

De-

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit $\mathcal{A}.\ a = B:b$, erit $\mathcal{A}b = aB$ (§. 82.). Eſt autem aB productum extremarum a, B, & $\mathcal{A}b$ eſt productum mediarum $\mathcal{A}$, b. Ergo erit $a.\ \mathcal{A} = b.\ B$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

In omni proportionalitate Geometrica termini conſequentes ſunt homologi.

122. Eadem enim eſt ipſorum ratio ad ſuos antecedentes.

THEOREMA VI.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam, quam tertia ad quartam, facta inverſione, habebit ſecunda minorem rationem ad primam, quam habeat quarta ad tertiam. Et viciſſim ſi prima habuerit ad ſecundam minorem rationem, quam tertia ad quartam, ratio ſecundæ ad primam major erit ratione quartæ ad tertiam.

I.

123. Eſto $\mathcal{A}.\ a > B.\ b$. Dico, *invertendo* eſſe $a.\ \mathcal{A} < b.\ B$.

Demonſtratio.

Etenim cum ſit $\mathcal{A}.\ a > B.\ b$, erit $\mathcal{A}b > aB$ (§. 98.). Eſt autem $\mathcal{A}b$ productum mediarum $\mathcal{A}$, b, & aB eſt productum extremarum a, B. Ergò habebitur $a.\ \mathcal{A} < a.\ B$ (§. 101.).

II.

124. Viciſſim vero ſit $\mathcal{A}.\ a < B.\ b$. Dico, *invertendo* eſſe $a.\ \mathcal{A} > b.\ B$.

Demonſtratio.

Eſt enim hoc ipſo $\mathcal{A}b < aB$ (§. 99.). Ergo erit $a.\ \mathcal{A} > b.\ B$ (§. 100.). Itaque ſi prima quatuor magnitudinum &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam alternatim ſumta proportionales erunt.

125. Eſto $A. a = B. b$. Dico, etiam *alternando*, eſſe $A. B = a. b$.

Demonſtratio.

Quandoquidem cum ſit $A. a = B. b$, erit $Ab = aB$ (§. 82.). Facta autem alternatione, Ab eſt adhuc productum extremarum, & aB, ſive Ba eſt productum mediarum. Ergo erit $A. B = a. b$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Partes ſimiles duarum magnitudinum ſunt directe inter ſe, ut ipſa magnitudines.

126. Nimirum ſi magnitudines a, b fuerint partes ſimiles aliquotæ, vel aliquantæ duarum magnitudinum A, B, eam partes ipſæ rationem habebunt inter ſe, quam habent ipſæ magnitudines. Cum enim per hypotheſim ſit $a. A = b. B$ (§. 37.), erit etiam $a. b = A. B$ (§. 125.).

COROLLARIUM II.

Magnitudines totales ſunt directe inter ſe, ut partes ipſarum ſimiles.

127. Demonſtratio eadem eſt cum præcedenti.

COROLLARIUM III.

Si prima quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis, vel major, aut minor tertia, etiam ſecunda erit æqualis, vel major, aut minor quarta. Similiter ſi ſecunda fuerit æqualis, vel major, aut minor quarta, etiam prima erit æqualis vel major, aut minor tertia.

128. Poſita nempe analogia $a. b = c. d$, ſi fuerit $a = c$, vel $a > c$, aut $a < c$, erit etiam $b = d$, vel $b > d$, aut $b <$. Similiter erit $a = c$, ſi fuerit $b = d$, vel $a > c$, ſi fuerit $b > d$; aut demum $a < c$, ſi fuerit $b < d$. Etenim cum ſit $a. \quad = c. d$, erit quoque $a. c = b. d$ (§. 125.); ac proinde &c. (§. 45.).

THEOREMA VII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam, quam tertia ad quartam, erit alternando ratio primæ ad tertiam major ratione ſecundæ ad quartam. Similiter ſi ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, erit quoque ratio primæ ad tertiam minor ratione ſecundæ ad quartam.

I.

129. Sit $A.\,a > B.\,b$. Dico, etiam *alternando*, eſſe $A.\,B > a.\,b$.

Demonſtratio.

Si namque fuerit $A.\,a > B.\,b$, erit $Ab > aB$ (§. 98.). Et ſi fuerit $Ab > aB$, erit quoque $A.\,B > a.\,b$ (§. 100.).

II.

130. Sit vero $A.\,a < B.\,b$. Dico, itidem *alternando*, eſſe $A.\,B. < a.\,b$.

Demonſtratio.

Demonſtratur eodem modo. Habetur enim hoc ipſo $Ab < aB$ (§. 99.); ac proinde $A.\,B < a.\,b$ (§. 101.). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si prima quatuor magnitudinum habuerit majorem rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; fuerit autem ſecunda æqualis quartæ, prima erit major tertia; erit vero minor, ſi ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, fueritque itidem ſecunda æqualis quartæ.

131. Videlicet ſi fuerit $A.\,a > B.\,b$, & $a = b$, erit $A > B$. Si vero fuerit $A.\,a < B.\,b$, & $a = b$, erit $A < B$. Facta namque hypotheſi, ut ſit $A.\,a > B.\,b$, erit etiam $A.\,B > a.\,b$ (§. 129.). Ratio autem termini a ad terminum b eſt ratio æqualitatis per hypotheſim. Ergo ratio termini A ad terminum B erit ratio majoris inæqualitatis (40.); ac proinde erit $A > B$. Similiter ſi fuerit $A.\,a < B.\,b$, erit $A.\,B < a.\,b$ (§. 130.). Eſt autem $\frac{a}{b}$ ratio æqualitatis per hypotheſim. Ergo ratio $\frac{A}{B}$ erit minoris inæqualitatis (§. 40.); atque adeo habebitur $A < B$ (§. 16.).

THEOREMA IX.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compoſitæ proportionales erunt.

132. Eſto $A . a = B . b$. Dico, etiam *componendo*, eſſe $A + a . a = B + b . b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A . a = B . b$, erit $Ab = aB$ (§. 82.; ac propterea erit etiam $Ab + ab = aB + ab$ (*Syn. Alg.* §. 265.). Eſt autem $Ab + ab$ productum extremarum $A + a$, b, & $aB + ab$ eſt productum mediarum a, $B + b$ (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A + a : a = B + b . b$ (§. 84.). Si quatuor itaque magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA X.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam quam tertia ad quartam, etiam componendo, prima cum ſecunda majorem rationem habebit ad ſecundam, quam tertia ſimul cum quarta ad quartam. Similiter ſi ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, ratio itidem primæ cum ſecunda ad ſecundam minor erit ratione tertiæ cum quarta ad quartam.

I.

133. Eſto $A . a > B . b$. Dico, etiam *componendo*, eſſe $A + a . a > B + b . b$.

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit $A . a > B . b$, erit $Ab > aB$ (§. 98.), adeoque $Ab + ab > aB + ab$ (*Syn. Alg.* §. 268) Eſt autem $Ab + ab$ productum extremarum $A + a$, b, & $aB + ab$ eſt productum mediarum a, $B + b$ (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A + a . a > B + b . b$ (§. 100.).

I I.

134. Sit vero $A . a < B . b$. Dico, *componendo*, eſſe $A + a . a < B + b . b$.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Erit enim $Ab < aB$ (§. 99.), ac proinde $Ab + ab < aB + ab$ (*Syn. Alg.* §. 268). Igitur erit quoque $A + a . a < B + b . b$ (§. 101.). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

THEOREMA XI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam diviſæ proportionales erunt.

135. Eſto $A.a = B$. Dico, eſſe $A - a.a = B - b.b$.

Demonſtratio.

Etenim cum ſit per hypotheſim $A.a = B.b$, erit $Ab = aB$ (§. 82.); ac proinde $Ab - ab = aB - ab$ (*Syn. Alg.* §. 166.). Conſtat autem, $Ab - ab$ eſſe productum extremarum $A - a$, b, & $aB - ab$ eſſe productum mediarum a, $B - b$ (*Ibid.* §. 59.). Ergo erit $A - a.\ a = B - b.\ b.$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam, quam tertia ad quartam, etiam dividendo, habebit prima majorem rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam. Similiter ſi ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, etiam dividendo, ratio primæ ad ſecundam minor erit ratione tertiæ ad quartam.

I.

136. Sit $A.a > B.b$. Dico, etiam *dividendo*, eſſe $A - a.a > B - b.b$.

Demonſtratio.

Cum enim habeatur per hypotheſim $A.a > B.b$, erit $Ab > aB$ (§. 98.); atque adeo $Ab - ab > aB - ab$ (*Syn. Alg.* §. 269.). Eſt autem $Ab - ab = \overline{A - a} \times b$, ſicuti etiam $aB - ab = a \times \overline{B - b}$ (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A - a.\ a > B - b.b$ (§. 100.).

II.

137. Sit $A.a < B.b$. Dico, *dividendo*, eſſe $A - a.a < B - b.b$.

Demonſtratio.

Oſtenditur eodem modo. Nam cum propter hypotheſim ſit $Ab < aB$ (§. 99.); adeoque $Ab - ab < aB - ab$ (*Sin. Alg.* §. 269.); ſitque $Ab - ab = \overline{A - a} \times b$, quem-

admodum etiam $aB - ab = a \times \overline{B - b}$ (*Syn. Alg.* §. 59.), erit $A - a . a < B - b . b$ (§. 101.). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam compoſita per converſionem rationis proportionales erunt.

138. Eſto $A . a = B . b$. Dico, etiam *componendo* per *converſionem rationis*, eſſe $A + a . A = B + b . B$.

Demonſtratio.

Cum enim propter hypotheſim ſit $Ab = aB$ (§. 82.), erit etiam $Ab + AB = aB + AB$ (*Syn. Alg.* §. 265.). Eſt autem $Ab + AB$ productum mediarum A, $B + b$, & $aB + AB$ eſt productum extremarum $A + a$, B (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A + a . A = B + b . B$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIV.

Si prima quatuor magnitudinum majorem habuerit rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam, componendo per converſionem rationis, prima cum ſecunda minorem rationem habebit ad primam, quam tertia cum quarta ad tertiam. Si vero ratio prima ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, componendo per converſionem rationis, ratio primæ cum ſecunda ad primam major erit ratione tertiæ cum quarta ad tertiam.

I.

139. Sit $A . a > B . b$. Dico, *componendo* per *converſionem rationis*, eſſe $A + a . A < B + b . B$.

Demonſtratio.

Quippe cum ſit $A . a > B . b$, erit $Ab > aB$ (§. 98.) ac proinde $Ab + AB > aB + AB$ (*Syn. Alg.* §. 268.). Eſt autem $aB + AB = \overline{A + a} \times B$, & $Ab + AB = A \times \overline{B + b}$ (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A + a . A < B + b . B$ (§. 101.). (§. 38.).

II.

140. Sit vero $A . a < B . b$. Dico, *componendo* per *converſionem rationis*, eſſe $A + a . A > B + b . B$.

De-

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Quandoquidem cum propter hypotheſim habeatur $Ab < aB$ (§. 99.); ac proinde $aB + AB > Ab + AB$ (*Syn. Alg.* §. 268.), productum extremarum $A + a, B$ majus erit producto mediarum $A, B + b$. Quamobrem erit $A + a . A > B + b . B$ (§. 100.). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam diviſæ per converſionem rationis proproportionales erunt.

141. Eſto $A . a = B . b$. Dico, etiam *dividendo* per *converſionem rationis*, eſſe $A - a . A = B - b . B$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A . a = B . b$, erit $Ab = aB$ (§. 82.); ac propterea habebitur etiam $AB - aB = AB - Ab$ (*Syn. Alg.* §. 266.). Eſt autem $AB - aB = \overline{A - a} \times B$, ſicuti etiam $AB - Ab = A \times \overline{B - b}$ (*Syn. Alg.* §. 59.); atque adeo productum extremarum $A - a, B$ æquale producto mediarum $A, B - b$. Ergo erit quoque $A - a . A = B - b . B$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVI.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dividendo per converſionem rationis, exceſſus primæ ſupra ſecundam habebit majorem rationem ad primam, quam exceſſus tertiæ ſupra quartam ad tertiam. Si vero ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, exceſſus primæ ſupra ſecundam habebit minorem rationem ad primam, quam exceſſus tertiæ ſupra quartam ad tertiam.

I.

142. Sit $A . a > B . b$. Dico, *dividendo* per *converſionem rationis*, eſſe $A - a . A > B - b . B$.

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit $A . a > B . b$ erit $Ab > aB$ (§. 98.); atque adeo erit etiam $AB - aB > AB - Ab$ (*Syn. Alg.* §. 269.). Eſt autem $AB - aB = \overline{A - a} \times B$, ſicuti

ſicuti etiam $AB - Ab = A \times \overline{B - b}$ (*Syn. Alg.* §. 60.). Ergo erit $A - a . A > B - b . B$ (§. 100.).

II.

143. Sit modo $A . a < B . b$. Dico, eſſe $A - a . A < B - b . B$.

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit $A . a < B . b$, erit $Ab < aB$ (§. 99.); ac proinde $AB - aB < AB - Ab$ (*Syn. Alg.* §. 269.). Conſtat autem, eſſe $AB - aB = \overline{A - a} \times B$, & $AB - Ab = A \times \overline{B - b}$ (*Syn. Alg.* §. 60.). Ergo erit $A - a . A < B - b . B$. (§. 101.). Igitur ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVII.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionales, ſumma omnium antecedentium erit ad ſummam omnium conſequentium, ut una ex antecedentibus ad unam ex conſequentibus.

144. Sint quotcunque magnitudines proportionales, videlicet $A . a = B . b = D . d$. Dico, eſſe $A + B + D . a + b + d = A . a$.

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit $A . a = B . b = D . d$, ſi ponatur $\frac{A}{a} = m$, erit quoque tam $\frac{B}{b}$, quam $\frac{D}{d} = m$ (§. 34.); & ideo $am = A$, $bm = B$, $dm = D$ (§. 11.), nec non $am + bm + dm = A + B + D$ (*Syn. Alg.* 265.). Igitur $\frac{am + bm + dm}{a + b + d} = \frac{A + B + D}{a + b + d}$ (§. 81). Eſt autem $\frac{am + bm + dm}{a + b + d} = m$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Ergo erit quoque $\frac{A + B + D}{a + b + d} = m$ (§. 81.). Conſtat porro, eſſe per hypotheſim $\frac{A}{a} = m$. Ergo erit $\frac{A + B + D}{a + b + d} = \frac{A}{a}$, ſive $A + B + D . a + b + d = A . a$ (§. 34.). Itaque ſi fuerint quotcunque magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

Co-

Corollarium.

Si duabus magnitudinibus duæ ſimiles magnitudines addantur, ſummæ, quæ hinc emergunt, erunt, ut datæ magnitudines.

145. Ut ſi magnitudines a, b ſimiles fuerint duabus A, B, erit $A+a . B+b = A . B$. Etenim, cum per hypotheſim ſit $A . B = a . b$ (§. 37.), erit quoque $A+a . B+b = A . B$ (§. 144.).

THEOREMA XVIII.

Si prima quatuor magnitudinum majorem rationem habuerit ad ſecundam; quam tertia ad quartam, ſumma antecedentium minorem rationem habebit ad ſummam conſequentium, quam prima ad ſecundam. Si vero ratio primæ ad ſecundam minor fuerit ratione tertiæ ad quartam, ſumma antecedentium majorem rationem habebit ad ſummam conſequentium, quam habeat illarum prima ad ſecundam.

I.

145. Eſto $A . a > B . b$. Dico, eſſe $A+B . a+b < A . a$.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit $A . a > B . b$, erit $Ab > aB$ (§. 58.); ac proinde ſi utrumque productum adiiciatur eidem Aa, erit $Aa+aB < Aa+Ab$ (*Syn. Alg.* §. 268.). Eſt autem $Aa+aB$ productum extremarum $A+B$, a & $Aa+Ab$ eſt productum mediarum $a+B$, A, ut eſt evidens (*Syn. Alg.* §. 59.). Ergo erit $A+B . a+b < A . a$ (§. 100.).

II.

147. Sit vero $A . a < B . b$. Dico, eſſe $A+B . a+b > A . a$.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Quandoquidem ſtante hypotheſi, erit $Ab < aB$ (§. 99.); atque adeo $Aa+aB > Aa+Ab$ (*Syn. Alg.* §. 268.). Igitur erit quoque $A+B . a+b > A . a$ (§. 100.). Itaque ſi prima quatuor magnitudinum &c. quod erat oſtendendum.

THEO.

THEOREMA XIX.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit etiam reliqua ad reliquam, ut eſt tota ad totam.

148. Magnitudinibus A, B demantur partes a, b; ſitque $A.B = a.b$: Dico, eſſe $A - a.B - b = A.B$.

Demonſtratio.

Etenim ob hypotheſim erit $Ab = Ba$ (§. 82.); ac propterea $AB - aB = AB - bA$ (*Syn. Alg.* §. 266.). Eſt autem $AB - aB$ productum extremarum $A - a, B$, & $AB - bA$ productum mediarum $B - b$, A, ut patet. Ergo erit $A - a.B - b = A.B$ (§. 84.). Itaque ſi fuerit &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Partes ſimiles a ſuis totis ſublatæ relinquunt partes ſimiles.

149. Partes enim ſimiles duarum magnitudinum ſunt directe inter ſe, ut ipſæ magnitudines, quarum ſunt partes (§. 37.).

THEOREMA XX.

Si tota ad totam majorem habuerit rationem, quam ablata ad ablatam, etiam reliqua ad reliquam majorem rationem habebit, quam tota ad totam. Si vero ratio totius ad totam minor fuerit ratione ablatæ ad ablatam, reliqua ad reliquam minorem rationem habebit, quam tota ad totam.

I.

150. Magnitudinibus A, B demantur partes a, b; ſitque $A.B > a.b$: Dico, eſſe $A - a.B - b > A.B$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A.B > a.b$, erit $Ab > Ba$ (§. 98.); ac proinde erit etiam $AB - aB > AB - Ab$ (*Syn. Alg.* §. 269.). Eſt autem $AB - aB$ productum extremarum, & $AB - Ab$ productum mediarum. Ergo erit $A - a.B - b > A.B$ (§. 100.).

I I.

151. Modo ſit $A . B < b$. Dico, eſſe $A - a . B - b < A . B$.

Demonſtratio.

Namque ob hypotheſim erit $Ab < Ba$ (§. 99), adeoque $AB - aB < AB - bA$ (*Syn. Alg.* §. 269.) . Igitur , cum ſit $AB - aB$ productum extremarum , & $AB - bA$ productum mediarum , erit $A - a . B - b < A . B$ (§. 101.). Itaque ſi tota &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXI.

Si fuerint quatuor magnitudines geometrice proportionales , differentia antecedentium erit ad differentiam conſequentium , ut quævis antecedens ad ſuam conſequentem.

152. Sit $A . a = B$. Dico, eſſe $A - B . a - b = A . a = B . b$.

Demonſtratio.

Quandoquidem, cum ſit $A . a = B . b$, erit $Ab = aB$ (§. 82.); & ideo $Aa - Ba = Aa - bA$ (*Syn. Alg.* §. 266.). Eſt autem $Aa - Ba$ productum extremarum, & $Aa - bA$ productum mediarum. Ergo erit $A - B . a - b = A . a$ (84.); ac proinde etiam $A - B . a - b = B . b$ (§. 76.); cum ſit per hypotheſim $A . a = B . b$. Itaque ſi fuerint &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXII.

Si fuerint tres magnitudines tribus aliis proportionales , differentiæ priorum erunt proportionales differentiis poſteriorum.

153. Tres magnitudines A, B, C proportionales ſint tribus a, b, c, eſto nimirum $A . B = a . b$, & $B . C = b . c$. Dico, itidem eſſe $A - B . B - C = a - b . b - c$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A . B = a . b$, & $B . C = b . c$, erit quoque $A . a = B . b$, & $B . b = C . c$ (§. 125.). Eſt autem $A - B . a - b = A . a$, ſicuti etiam $B - C . b - c = B . b$ (§. 152.). Ergo erit $A - B . a - b = B - C . b - c$ (§. 76.); & *alternando* erit $A - B . B - C = a - b . b - c$ (§. 125.) Itaque ſi fuerint tres magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

Co-

Corollarium I.

Si tres inæquales magnitudines per eandem multiplicentur, differentiæ productorum erunt inter ſe, ut differentiæ ipſarum magnitudinum.

154. Ut ſi tres inæquales magnitudines a, b, c multiplicatæ fuerint per eandem quantitatem r, & fiant producta ar, br, cr, erit $ar - br . br - cr = a - b . b - c$. Eſt enim $ar . br = a . b$, & $br . cr = b . c$ (§. 93.). Igitur erit quoque $ar - br . br - cr = a - b . b - c$ (§. 153.).

Corollarium II.

Si tres inæquales magnitudines per eandem dividantur, quotientium differentiæ erunt inter ſe, ut differentiæ ipſarum magnitudinum.

155. Diviſis nempe tribus inæqualibus magnitudinibus a, b, c per eandem quantitatem d, ita ut ſit $\frac{a}{d} = m$, $\frac{b}{d} = n$ $\frac{c}{d} = r$, erit $m - n . n - r = a - b . b - c$. Eſt enim $m . n = a . b$, quemadmodum etiam $n . r = b . c$. (§. 94.). Quamobrem erit quoque $m - n . n - r = a - b . b - c$ (§. 153.).

Theorema XXIII.

Si quatuor magnitudines proportionales per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt proportionalia.

156. Eſto $A . a = B . b$, omneſque termini per eandem quantitatem d multiplicentur, productaque fiant Ad, ad, Bd, bd. Dico, eſſe $Ad . ad = Bd . bd$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $Ad\ ad = A . a$ (§. 93.), & per hypotheſim $A . a = B . b$, erit etiam $Ad . ad = B . b$ (§. 78.). Eſt autem $dB . bd = B . b$ (§. 93.). Ergo erit quoque $Ad . ad = Bd . bd$ (§. 76.). Igitur ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Si plures magnitudines continuo proportionales per eandem quantitatem multiplicentur, producta erunt itidem continuo inter ſe proportionalia.

157. Videlicet ſi fuerit $\div\!\!:\ a . b c . d$, erit etiam $\div\!\!:\ ax . bx . cx . dx$. Etenim

nim ob hypotheſim erit $a.b = b.c = c.d$ (§. 47.). Ergo erit $ax.bx = bx.cx = cx.dx$ (§. 156.); ac proinde $\div ax.bx.cx.dx$.

THEOREMA XXIV.

Si prima, & ſecunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero tertia, & quarta, producta erunt proportionalia.

158. Eſto $A.a = B.b$. Duæ autem magnitudines A, a multiplicentur per x, & duæ B, b per y. Dico, eſſe $Ax.ax = By.by$.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit $Ax.ax = A.a$ (§. 93.), & per hypotheſim $A.a = B.b$, erit quoque $Ax.ax = B.b$ (§. 78.). Eſt autem $By.by = B.b$ (§. 93.). Ergo erit etiam $Ax.ax = By.by$ (§. 76.). Itaque ſi prima &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si prima, & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem multiplicentur, per aliam vero ſecunda, & quarta, producta erunt proportionalia.

159. Si nimirum fuerit $A.a = B.b$, erit etiam $Ax.ay = Bx.by$. Quandoquidem ſi ponatur $A.a = B.b$, erit quoque $A.B = a.b$ (§. 125.); ac proinde $Ax.Bx = ay.by$ (158.). Igitur erit etiam $Ax.ay = Bx.by$ (§. 125.)

THEOREMA XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales per eandem quantitatem dividantur, quotientes erunt geometrice proportionales.

160. Sit $A.a = B.b$, omneſque termini per eandem quantitatem d dividantur, ſitque $\frac{A}{d} = m$, $\frac{a}{d} = n$, $\frac{B}{d} = p$, $\frac{b}{d} = q$. Dico, eſſe $m.n = p.q$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $m.n = A.a$ (§. 94.), & per hypotheſim $A.a = B.b$, erit etiam $m.n = B.b$ (§. 78.). Eſt autem $p.q = B.b$ (§. 94.). Igitur erit

erit quoque $m.n = p.q$ (§.76.). Si quatuor igitur magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Si plures magnitudines continuo inter ſe proportionales per eandem quantitatem diviſa fuerint, quotientes erunt continuo inter ſe proportionales.

161. Si nimirum fuerit $\dot{\dot{\div}}\, a.b.c.d$, & $\frac{a}{x} = m$, $\frac{b}{x} = n$, $\frac{c}{x} = p$, $\frac{d}{x} = q$, erit $\dot{\dot{\div}}\, m.n.p.q$. Etenim ex hypotheſi habetur $a.b = b.c = c.d$ (§.47.) Igitur erit $m.n = n.p = p.q$ (§. 160.); adeoque $\dot{\dot{\div}}\, m.n.p.q$.

Theorema XXVI.

Si prima, & ſecunda quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur, per aliam vero tertia, & quarta, quotientes erunt inter ſe proportionales.

162. Eſto $A.a = B.b$, nec non $\frac{A}{x} = m$, $\frac{a}{x} = n$, $\frac{B}{y} = p$, $\frac{b}{y} = q$ Dico, eſſe $m.n = p.q$.

Demonſtratio.

Eſt enim $m.n = A.a$ (§. 94.). Cumque ſit per hypotheſim $A.a = B.b$, erit etiam $m.n = B.b$ (§.78.). Conſtat autem, eſſe $p.q = B.b$ (§. 94.). Ergo erit quoque $m.n = p.q$ (§. 76.). Itaque ſi prima &c. quod erat &c.

Corollarium.

Si prima, & tertia quatuor magnitudinum proportionalium per unam quantitatem dividantur; per aliam vero ſecunda, & quarta, quotientes erunt proportionales.

163. Si nempe fuerit $A.a = B.b$. Ponatur autem $\frac{A}{x} = m$, $\frac{B}{x} = n$, $\frac{a}{y} = p$, $\frac{b}{y} = q$, erit $m.p = n.q$. Etenim cum ſit $A.a = B.b$, erit

etiam

etiam $A.B = a.b$ (§. 125.); ac proinde $m.n = p.q$ (§. 162.). Quamobrem erit quoque $m.p = n.q$ (§. 125.)

THEOREMA XXVII.

Fractiones eundem denominatorem habentes, ſunt directe inter ſe, ut numeratores, & quæ habent eundem numeratorem, ſunt inter ſe, ut denominatores reciproce.

I.

164. Sint duæ fractiones ejuſdem nominis $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$. Dico eſſe, $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} = a.b$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\frac{a}{m} . 1 = a.m$, & $\frac{b}{m} . 1 = b.m$ (§. 32.), erit quoque $\frac{a}{m} . a = 1.m$, & $\frac{b}{m} . b = 1.m$ (§. 125.), ac proinde $\frac{a}{m} . a = \frac{b}{m} . b$ (§. 76.). Igitur *alternando* habebitur $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} = a.b$ (§. 125.)

II.

165. Sint modo duæ fractiones $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{x}$ eundem numeratorem habentes. Dico, eas eſſe, ut denominatores *reciproce*, videlicet eſſe $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = x.y$.

Demonſtratio.

Reductis fractionibus ipſis ad idem nomen (*Syn. Algeb.* §. 116.), erit $\frac{ax}{yx} = \frac{a}{y}$, $\frac{ay}{xy} = \frac{a}{x}$; atque adeo $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = \frac{ax}{yx} . \frac{ay}{xy}$ (§. 125.). Eſt autem $\frac{ax}{yx} . \frac{ay}{xy} = ax.ay$ (§. 164.). Igitur erit quoque $\frac{a}{y} . \frac{a}{x} = ax.ay$ (§. 78.)

(§.78.). Manifeſtum porro eſt, eſſe $ax.ay = x.y$ (§.93.) Ergo erit ſimiliter $\frac{a}{y}.\frac{a}{x} = x.y$ (§.78.). Itaque fractiones &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

166. Datis idcirco pluribus fractionibus diſſimilibus, ipſiſque ad idem nomen revocatis, facile erit dignoſcere, quamnam proportionem inter ſe habeant.

THEOREMA XXVIII.

Si antecedentes plurium rationum termini, ſicuti etiam ipſarum conſequentes inter ſe mutuo reſpective multiplicentur, producta, quæ inde fiunt, erunt inter ſe in ratione compoſita ex illis omnibus rationibus datis.

167. Rationum $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{D}{d}$ antecedentes termini A, B, D, quemadmodum etiam earundem conſequentes a, b, d, multiplicentur *reſpective* inter ſe mutuo, & fiant producta ABD, abd. Dico, productum ABD eſſe ad productum abd in ratione *compoſita* ex rationibus $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{D}{d}$.

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{A}{a} = m, \frac{B}{b} = n, \frac{D}{d} = r$; ac proinde $am = A$, $bn = B$, $dr = D$ (§.11.), erit $ambndr = ABD$ (§.80.). Eſt autem $\frac{ambndr}{abd}$ mnr (*Syn. Alg.* §.72.) Ergo erit etiam $\frac{ABD}{abd} = mnr$ (§.81.). Quotus autem mnr oritur ex multiplicatione inter ſe mutuo *exponentium* m, n, r rationum $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{D}{d}$, eſtque mnr *exponens* rationis $\frac{ABD}{abd}$ (§. 8.). Ergo ratio producti ABD ad productum abd eſt compoſita ex rationibus $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{D}{d}$ (§. 52.). Itaque ſi antecedentes &c. quod erat oſtendendum.

Co:

Corollarium I.

Si fuerint quatuor magnitudines, productum ex ductu primæ in tertiam eſt ad productum ex ductu ſecundæ in quartam in ratione compoſita ex ratione primæ ad ſecundam, & ex ratione tertiæ ad quartam.

168. Poſitis nempe quatuor magnitudinis A, *a*, B, *b*, productum AB erit ad productum *ab* in ratione compoſita ex rationibus $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$. Eſt enim AB productum ex antecedentibus, & *ab* eſt productum ex conſequentibus ipſarum rationum terminis.

Corollarium II.

Si fuerint quatuor magnitudines, productum ex ductu primæ in ſecundam erit ad productum ex ductu tertiæ in quartam in ratione compoſita ex ratione primæ ad tertiam, & ex ratione ſecundæ ad quartam.

169. Videlicet poſitis magnitudinibus A, *a*, *B*, *b* erit *Aa* ad *Bb* in ratione compoſita ex rationibus $\frac{A}{B}$, $\frac{a}{b}$. Patet ex præcedenti.

Scholion.

170. Ut igitur determinetur *exponens* rationis ex pluribus rationibus datis compoſitæ, multiplicandi ſunt inter ſe mutuo ipſarum antecedentes termini ex una, & earundem conſequentes ex altera parte. Fractio enim ex hiſce productis facta rationem quæſitam determinabit. Ut ſi definire oporteat rationem compoſitam ex rationibus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, facta multiplicatione antecedentium 2, 4, 5, ſicuti etiam conſequentium 3, 7, 9, cum ſit $2\times4\times5=40$, & $3\times7\times9=189$, ratio, quæ exprimitur per fractionem $\frac{48}{189}$, erit ratio quæſita.

THEOREMA XXIX.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales ſeorſim multiplicentur, producta erunt proportionalia.

171. Eſto $A.B = D.F$, ſicuti etiam $a.b = d.f$. Dico, eſſe $Aa.Bb = Dd.Ff$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A.B = D.F$, ſi ponatur $\frac{A}{B} = m$, erit etiam $\frac{D}{F} = m$ (§.34.). Eadem ratione, ſi fuerit $\frac{a}{b} = n$, erit quoque $\frac{d}{f} = n$. Igitur erit $\frac{Aa}{Bb} = mn$, & $\frac{Dd}{Ff} = mn$ (§.167.); ac proinde $\frac{Aa}{Bb} = \frac{Dd}{Ff}$, ſive $Aa.Bb = Dd.Ff$ (§.34.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo proportionales per totidem continuo itidem proportionales ſeorſim multiplicentur, producta erunt continuo inter ſe proportionalia.

172. Si nimirum fuerit ∺ $A.B.D.F$, & ∺ $a.b.d.f$, erit ſimiliter ∺ $Aa.Bb.Dd.Ff$. Eſt enim $A.B = B.D = D.F$, ſicuti etiam $a.b = b.d = d.f$ (§.47.). Igitur erit $Aa.Bb = Bb.Dd = Dd.Ff$ (§.171.), ſeu ∺ $Aa.Bb.Dd.Ff$ (§.48.).

SCHOLION.

173. Hinc oſtenditur artificium multiplicandi fractiones inter ſe mutuo, quod alibi tradidimus (*Syn. Alg.* §. 121.), videlicet in eo illud conſiſtere, ut ipſarum numeratores, atque denominatores inter ſe mutuo *reſpective* multiplicentur, & ex productis, quæ inde fiunt, fractio conſtituatur. Sit enim fractio $\frac{a}{b}$ multiplicanda per fractionem $\frac{c}{d}$. Quoniam ergo denominator cujuſvis fractionis unitatem adæquat (*Syn. Alg.* §. 96.); omniſque fractio ſe habet ad unitatem, ut ipſius numerator ad ſuum denominatorem (§.32.), ſi ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{d} = n$, erit $m.1 = a.b$, & $n.1 = c.d$.

ac

Digitized by Google

ac proinde $mn \, . \, 1 = ac \, . \, bd$ (§. 171.), ſeu $\frac{mn}{1} = \frac{ac}{bd}$ (§. 6.). Fractio autem $\frac{mn}{1}$ exprimit valorem producti ex valoribus m, n inter ſe multiplicatis; cum ſit $\frac{mn}{1} = mn$ (*Syn. Alg.* §.69.). Ergo fractio quoque $\frac{ac}{bd}$ valorem deſignabit producti, quod fit ex multiplicatione fractionis $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$.

THEOREMA XXX.

Si quatuor magnitudines proportionales per totidem proportionales ſeorſim dividantur, quotientes erunt quoque inter ſe proportionales.

174. Eſto $\mathcal{A}.B = D.F$, & $a.b = d.f$, ſitque $\frac{\mathcal{A}}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = p$, & $\frac{F}{f} = q$. Dico, eſſe $m.n = p.q$.

Demonſtratio.

Etenim cum ex hypotheſi habeatur $am = \mathcal{A}$, $bn = B$, $dp = D$, $fq = F$ (§. 11.), ſicuti eſt $\mathcal{A}.B = D.F$, ita erit $am.bn = dp.fq$; ac propterea $amfq = bndp$ (§. 82.). Eſt autem $af = bd$ (§. 82.); cum ſit $a.b = d.f$. Ergo erit $\frac{amfq}{af} = \frac{bndp}{bd}$ (§. 81.). Conſtat porro, eſſe $\frac{amfq}{af} = mq$, ſicuti etiam $\frac{bndp}{bd} = np$ (*Syn. Alg.* §.72.). Ergo erit $mq = np$ (§. 81.), atque adeo $m.n = p.q$ (§. 84.). Itaque ſi quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si plures magnitudines continuo proportionales per totidem continuo ſeorſim proportionales dividantur, quotientes erunt ſimiliter continuo proportionales.

175. Si nempe fuerit $\div \mathcal{A}.B.D.F$, & $\div a.b.d,f$, nec non $\frac{\mathcal{A}}{a} = m$, $\frac{B}{b} = n$, $\frac{D}{d} = p$, $\frac{F}{f} = q$, erit $\div m.n.p.q$. Enimvero cum ſit $\mathcal{A}.B.$

 $= B$

$= B.D = D.F$, & $a.b = b.d = df$ (§.47.); erit quoque $m.n = n.p = p.q$ (§.174.); quod idem eſt ac ∺ $m.n.p.q$ (§.48.).

THEOREMA XXXI.

Si fuerint quotcunque magnitudines in eadem ſerie conſtitutæ, ratio primæ ad ultimam erit compoſita ex omnibus rationibus intermediis.

176. Sint plures magnitudines a, b, c, d, e, f in eadem ſerie conſtitutæ. Dico, primam a eſſe ad ultimam f in ratione compoſita ex omnibus rationibus intermediis $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$.

Demonſtratio.

Productum $\frac{abcde}{bcdef}$ exprimit rationem compoſitam ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$ inter ſe multiplicatis (§.167). Eſt autem $\frac{a}{f} = \frac{abcde}{bcdef}$ (*Syn. Alg.* §. 73.). Ergo ratio quoque magnitudinis a ad magnitudinem f eſt compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$. Si fuerint ergo quodcunque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo inter ſe proportionales, prima erit ad tertiam in ratione duplicata, ad quartam in ratione triplicata, ad quintam in ratione quadruplicata &c. primæ ad ſecundam.

177. Ut ſi fuerit ∺ $a.b.c.d.e.f$, ratio $\frac{a}{c}$ erit *duplicata*, ratio $\frac{a}{d}$ *triplicata*, ratio $\frac{a}{e}$ *quadruplicata* &c. rationis $\frac{a}{b}$. Eſt enim $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c}$, ratio $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d}$, & ratio $\frac{a}{e} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e}$ (§.

(§. 176). Rationes autem $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$ ſunt per hypotheſim rationi $\frac{a}{b}$ æquales. Ergo magnitudo a erit ad magnitudinem c in ratione *duplicata*, ad magnitudinem d in ratione *triplicata*; ad magnitudinem e in ratione *quadruplicata* ejuſdem a ad ſecundam b (§. 55.)

Corollarium II.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo inter ſe proportionales, prima erit ad ſecundam in ratione ſubduplicata prima ad tertiam ſubtriplicata prima ad quartam, ſubquadruplicata prima ad quintam &c. & ſic deinceps.

178. Patet ex præcedenti. Si namque ponatur $\div a . b . c . d . e . f$, manifeſtum eſt, ex ratione $\frac{a}{b}$ ducta in ſeipſam effici rationem $\frac{a}{c}$, ex ratione $\frac{a}{b}$ multiplicata per $\frac{a}{c}$ oriri rationem $\frac{a}{d}$, & ex eadem $\frac{a}{b}$ ducta in rationem $\frac{a}{d}$ conſurgere rationem $\frac{a}{e}$ (§. 177.). Ergo ratio $\frac{a}{b}$ erit *ſubduplicata* rationis $\frac{a}{c}$, *ſubtriplicata* rationis $\frac{a}{d}$, *ſubquadruplicata* rationis $\frac{a}{e}$, atque ita deinceps (§. 59.)

Corollarium III.

Si fuerint plures magnitudines in duplici ſerie conſtitutæ, ordinatam proportionem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

179. Si nimirum ex una parte habeantur magnitudines A, B, D, & ex alia totidem a, b, d fueritque $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, $\frac{B}{D} = \frac{b}{d}$, erit $\frac{A}{D} = \frac{a}{d}$, ſive $A . D = a . d$. Cum enim ſit $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, & $\frac{B}{D} = \frac{b}{d}$, erit quoque $\frac{AB}{BD} = \frac{ab}{bd}$ (§. 80.). Eſt autem $\frac{A}{D} = \frac{AB}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ab}{bd}$ (§. 176.);

Ergo erit etiam $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{a}{d}$ (§. 76.)

Corollarium IV.

Si fuerint plures magnitudines in duplici ſerie conſtituta, quarum prima in una ſerie habeat majorem rationem ad ſecundam, ſecunda ad tertiam &c. quam habeat in altera ſerie prima ad ſecundam, ſecunda ad tertiam &c. prima in priori ſerie majorem rationem habebit ad ultimam, quam prima in poſteriori ſerie ad ultimam.

180. Ut ſi ex una parte habeantur magnitudines $\mathcal{A}$, B, D, & ex altera magnitudines a, b, d, ſitque $\frac{\mathcal{A}}{B} > \frac{a}{b}$, $\frac{B}{D} > \frac{b}{d}$, erit quoque $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$, ſive $\mathcal{A}D > a.d$. Stante namque hypotheſi, habebitur $\frac{\mathcal{A}B}{BD} > \frac{ab}{bd}$ (§. 95.). Eſt autem $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{\mathcal{A}B}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ab}{bd}$ (§. 176.). Ergo erit etiam $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$, ſeu $\mathcal{A}D > a.d$ (§. 79.)

Corollarium V.

Si fuerint plures magnitudines in duplici ſerie conſtituta, pertubatam proportionem habentes, ratio duarum extremarum ex una parte aqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

181. Videlicet ſi ex una parte fuerint tres magnitudines $\mathcal{A}$, B, D, & ex alia tres a, b, d, quæ ſic ſe habeant, ut ſit $\frac{\mathcal{A}}{B} = \frac{b}{d}$, & $\frac{B}{D} = \frac{a}{b}$; adhuc erit $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{a}{d}$. Etenim ob hypotheſim erit $\frac{\mathcal{A}B}{BD} = \frac{ba}{db}$ (§. 80). Conſtat autem, eſſe $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{\mathcal{A}B}{BD}$, & $\frac{a}{d} = \frac{ba}{bd}$ (§. 176.). Ergo erit $\frac{\mathcal{A}}{D} = \frac{a}{d}$ (§. 76.)

Digitized by Google

Corollarium VI.

Si prima plurium magnitudinum in una ſerie majorem habuerit rationem ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam, quam habeat in altera ſerie ſecunda ad tertiam, & prima ad ſecundam, ratio quoque prima ad tertiam in priori ſerie major erit ratione prima ad tertiam in ſerie poſteriori.

182. Poſitis nempe tribus magnitudinibus $\mathcal{A}, B, D$ ex una parte, totidemque a, b, d ex alia, quæ ſic ſe habeant, ut ſit $\frac{\mathcal{A}}{B} > \frac{b}{d}$, & $\frac{B}{D} > \frac{a}{b}$, erit quoque $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$. Demonſtratur eodem modo, quo oſtenſum eſt *corollarium* IV. Etenim eandem ob cauſam erit $\frac{\mathcal{A}B}{BD} > \frac{ba}{db}$, ac proinde $\frac{\mathcal{A}}{D} > \frac{a}{d}$; cum ſit $\frac{\mathcal{A}B}{BD} = \frac{\mathcal{A}}{D}$, & $\frac{ba}{db} = \frac{a}{d}$.

Scholion.

183. Ex hoc demum theoremate oſtenditur methodus alibi tradita (*Syn. Alg.* §. 131.) reducendi fractionem fractionis ad fractionem primam. Pro intelligentia idcirco notandum eſt, fractionem fractionis ad fractionem primam reducere idem eſſe omnino, ac invenire, quot, & quales particulas unitatis fractio ipſa ſecunda adæquet, ſeu quamnam fractio ſecunda ad unitatem rationem habeat. Diximus autem, fractionem fractionis ad fractionem primam reduci, ſi numerator unius per numeratorem alterius, & denominator per denominatorem multiplicentur, & ex productis *reſpective* nova fractio conſtituatur; ut ſi $\frac{a}{b}$ ſit fractio fractionis $\frac{c}{d}$, factum $\frac{ac}{bd}$ eſſe fractionem primam, ad quam fractio $\frac{a}{b}$ revocanda erat. Oſtendendum idcirco eſt, factum $\frac{ac}{bd}$ rationem exprimere fractionis ſecundæ $\frac{a}{b}$ ad unitatem. Itaque cum denominator b fractionis ſecundæ $\frac{a}{b}$ adæquet valorem

Digitized by Google

fractionis primæ $\frac{c}{d}$ (*Syn. Alg.* §.109.), & numerator *a* partem, vel partes deſignet hujus valoris, quas importat fractio ipſa ſecunda $\frac{a}{b}$ (*Ibid.*), erit fractio ſecunda $\frac{a}{b}$ ad fractionem primam $\frac{c}{d}$, ut numerator *a* ad denominaterem *b*; atque adeo fractio ipſa $\frac{a}{b}$ erit *exponens* rationis, quam habet fractio ſecunda $\frac{a}{b}$ ad primam $\frac{c}{d}$ (§. 7.). Similiter cum fractio prima $\frac{c}{d}$ ſit ad unitatem, ut numerator *c* ad denominatorem *d* (§. 32.), fractio $\frac{c}{d}$ erit *exponens* rationis ipſius fractionis $\frac{c}{d}$ ad unitatem (§. 7.). Conſtat autem, poſitis tribus quantitatibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, 1, primam $\frac{a}{b}$ eſſe ad tertiam 1 in ratione compoſita ex ratione primæ $\frac{a}{b}$ ad ſecundam $\frac{c}{d}$, & ex ratione ſecundæ $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 (§. 176.), atque adeo in ea ratione, cujus *exponens* ſit factum ex *exponente* rationis, quam habet prima $\frac{a}{b}$ ad ſecundam $\frac{c}{d}$, multiplicato per *exponente rationis*, quam habet ſecunda $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 (§. 52.). Ergo, cum *exponens* rationis primi termini $\frac{a}{b}$ ad ſecundum $\frac{c}{d}$ ſit $\frac{a}{b}$, & *exponens* rationis ſecundi termini $\frac{c}{d}$ ad tertiam 1 ſit $\frac{c}{d}$, ut modo vidimus, *exponens* rationis, quam habet fractio ſecunda $\frac{a}{b}$ ad unitatem erit factum $\frac{ac}{bd}$; adeoque &c.

THEO-

THEOREMA XXXII.

Si fuerint quotcunque magnitudines continuo geometrice proportionales, quadratum primæ erit ad quadratum ſecundæ, ut prima ad tertiam, cubus primæ ad cubum ſecundæ, ut prima ad quartam, quadrato-quadratum primæ ad quadrato-quadratum ſecundæ, ut prima ad quintam, & ſic deinceps.

184. Eſto ∺ $a.b.c.d.e.$ Dico, eſſe $a^2.b^2 = a.c$, $a^3.b^3 = a.d$, $a^4.b^4 = a.e$.

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{a}{b} = m$, atque adeo etiam $\frac{b}{c} = m$, $\frac{c}{d} = m$, $\frac{d}{e} = m$ (§.34). Igitur erit $\frac{a^2}{b^2} = m^2$, $\frac{a^3}{b^3} = m^3$, $\frac{a^4}{b^4} = m^4$ (§.57). Manifeſtum eſt autem eſſe $\frac{a}{c} = m^2$, $\frac{a}{d} = m^3$, $\frac{a}{e} = m^4$ (§.177.). Ergo erit quoque $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$, $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a}{e}$, ſeu $a^2.b^2 = a.c$, $a^3.b^3 = a.d$, $a^4.b^4 = a.e$ (§.34.). Itaque ſi fuerint quotcunque magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Magnitudines quadratæ ſunt in ratione duplicata, cubicæ in ratione triplicata, quadro-quadratæ in ratione quadruplicata &c. ſuarum radicum.

185. Videlicet ratio quadrati a^2 ad quadratum b^2 eſt *duplicata* ratio cubi a^3 ad cubum b^3 eſt *triplicata* &c. rationis radicis a ad radicem b. Oſtenſum eſt enim, rationem $\frac{a}{c}$ eſſe *duplicatam*, rationem $\frac{a}{d}$ *triplicatam* &c. rationis $\frac{a}{b}$ (§.177.).

COROLLARIUM II.

Radices quadratæ ſunt in ratione ſubduplicata, radices cubicæ in ratione ſubtriplicata, radices quadrato-quadratæ in ratione ſubquadruplicata &c. ſuarum poteſtatum.

186. Demonſtravimus enim, rationem $\frac{a}{b}$ eſſe *ſubduplicatam* rationis $\frac{a}{c}$, *ſubtriplicatam* rationis $\frac{a}{d}$, *ſubquadruplicatam* rationis $\frac{a}{e}$ (§.178.).

Co-

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Poteſtates ejuſdem gradus, quæ æquales ſunt inter ſe, æquales radices habent; & viciſſim poteſtates ejuſdem gradus, quæ æquales radices habent, ſunt æquales.

187. Si nimirum fuerit $aa = bb$, erit quoque $a = b$; & viciſſim, ſi fuerit $a = b$, erit ſimiliter $aa = bb$. Etenim cum per hypotheſim ſit $\frac{aa}{bb} = 1$ (§. 14.), erit $\frac{a}{b} = \sqrt{1}$ (§. 61.). Eſt autem $\sqrt{1} = 1$ (*Syn. Alg.* §. 187.): Ergo erit $\frac{a}{b} = 1$; adeoque $a = b$ (§. 14.). Similiter ſi ponatur $\frac{a}{b} = 1$, cum ratio quadrati aa ad quadratum bb ſit *duplicata* rationis a ad b (§. 185.), *exponens* rationis $\frac{aa}{bb}$ erit quadratum unitatis (§. 57.). Quadratum autem unitatis eſt unitas (*Syn. Alg.* §. 187.). Ergo erit $\frac{aa}{bb} = 1$; ac proinde $aa = bb$ (§. 14.). Eodem modo ratiocinare de aliis poteſtatibus.

COROLLARIUM IV.

Poteſtates ejuſdem gradus magnitudinum proportionalium ſunt inter ſe proportionales; & viciſſim poteſtates ejuſdem gradus inter ſe proportionales habent radices itidem proportionales.

188. Ut ſi fuerit $a.b = c.d$, erit quoque $aa.bb = cc.dd$; & viciſſim ſi fuerit $aa.bb = cc.dd$, erit ſimiliter $a.b = c.d$. Quandoquidem cum ſit $a.b = c.d$, ſicuti magnitudines quadratæ aa, bb ſunt in ratione *duplicata* radicum a, b (§. 185.), erunt quoque in ratione *duplicata* radicum c, d. Sunt autem etiam magnitudines quadratæ cc, dd in ratione *duplicata* radicum c, d. Ergo ratio duarum aa, bb ſimilis eſt rationi duarum cc, dd (§. 76.), eſtque propterea $aa.bb = cc.dd$ (§. 43.). Eodem ratiocinio oſtendetur, eſſe $a.b = c.d$, ſi fuerit $aa.bb = cc.dd$. Quandoquidem cum radices a, b ſint in ratione *ſubduplicata* magnitudinum quadraticarum aa, bb (§. 186.), erunt quoque in ratione *ſubduplicata* duarum cc, dd. Sunt autem etiam duæ c, d in ratione *ſubduplicata* duarum cc, dd. Ergo ratio duarum a, b ſimilis eſt rationi duarum c, d, atque adeo erit $a.b = c.d$ (§. 43.). Eodem modo ratiocinare de poteſtatibus altioris gradus.

Digitized by Google

Corollarium V.

Poteſtates ejuſdem gradus magnitudinum continuo proportionalium ſunt continuo inter ſe proportionales; & viciſſim radices poteſtatum ejuſdem gradus continuo proportionalium ſunt itidem continuo inter ſe proportionales.

189. Si nempe fuerit $\div\div\ a.\ b.\ c$, erit etiam $\div\div\ aa.\ bb.\ cc$; & viciſſim ſi fuerit $\div\div\ aa.\ bb.\ cc$, erit quoque $\div\div\ a.\ b\ c$. Eſt enim $\div\div\ a.\ b.\ c$ idem ac $a.b = b.\ c$, ſicuti etiam $\div\div\ aa.\ bb.\ cc$, idem ac $aa.bb = bb.\ cc$ (§. 48.); adeoque &c.

APPENDIX

De proportionalitate Arithmetica, & Harmonica.

DEFINITIO I.

190. *Proportionalitas Arithmetica eſt exceſſuum, ſive differentiarum æqualitas. Quatuor nempe magnitudines dicuntur Arithmetice proportionales, cum exceſſus primæ ſupra ſecundam exceſſum adæquat tertiæ ſupra quartam, aut exceſſus ſecundæ ſupra primam eſt illi æqualis, quo tertiam excedit quarta. Tres quoque magnitudines Arithmetice proportionales vocantur, cum differentia primæ, & ſecundæ eſt æqualis differentiæ ſecundæ, & tertiæ.* Sic quatuor magnitudines a, b, c, d erunt Arithmetice proportionales, ſi facta hypotheſi, ut ſit $a - b = m$, & $c - d = n$, vel $b - a = x$, & $d - c = y$, fuerit $m = n$, $x = y$. Similiter tres a, b, c erunt Arithmetice proportionales, ſi poſita $a - b = d$, $b - c = f$, aut $b - a = r$, & $c - l = p$, fuerit $d = f$, $r = p$.

HYPOTHESIS I.

191. Ad indicandam proportionalitatem Arithmeticam quatuor magnitudinum a, b, c, d ſcribitur $a - b = c - d$, vel $b - a = d - c$. Alii tamen utuntur ſigno :::, ſcribuntque $a.$ ::: $c.\ d.$

DEFINITIO II.

192. Proportionalitas Arithmetica vel *continua* eſt, vel *diſcreta*. *Proportionalitas Arithmetica continua eſt, cum differentia ſecundæ, & tertiæ magnitudinis eadem eſt cum differentia primæ, & ſecundæ, ac proinde etiam tertiæ, & quartæ. Diſcreta vero tunc habetur, cum differentia ſecundæ, & tertiæ eadem non eſt cum differentia primæ, & ſecundæ, atque adeo etiam*

tertiæ

tertiæ, & *quartæ*. Ut ſi fuerit $a-b=b-c=c-d$, vel $b-a=c-b=d-c$, quatuor magnitudines a, b, c, d erunt *continuo* Arithmetice proportionales. At vero *diſcrete* tantum proportionales, ſi fuerit dumtaxat $a-b=c-d$, vel $b-a=d-c$.

DEFINITIO III.

193. Quatuor magnitudinum continuo Arithmetice proportionalium ſecunda, & tertia dicuntur *duæ media continuo proportionales*. Trium quoque magnitudinum continuo Arithmetice proportionalium ſecunda *media proportionalis* nuncupatur.

HYPOTHESIS II.

194. Proportionalitas continua Arithmetica indicatur, præfigendo ſignum $\div$ ipſis terminis proportionalibus: ad exprimendam ſcilicet proportionalitatem continuam Arithmeticam magnitudinum a, b, c, d, ſcribitur $\div\ a.\ b.\ c.\ d.$

THEOREMA I.

Si fuerint quatuor magnitudines Arithmetice proportionales, ſumma extremarum erit æqualis ſummæ mediarum.

195. Eſto $a-b=c-d$. Dico, eſſe $a+d=b+c$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit per hypotheſim $a-b=c-d$, ſi utrique membro æquationis eadem magnitudo d adiiciatur, erit $a-b+d=c-d+d$ (*Syn. Alg.* §. 265.). Eſt autem $c-d+d=c$, cum ſit $-d+d=0$. Ergo erit $a-b+d=c$; atque adeo $a-b+d+b=c+b$ (*Syn. Alg.* §. 265.), ſive $a+d=c+b$. Itaque ſi fuerint &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines continuo Arithmetice proportionales, ſumma extremarum erit dupla mediæ.

196. Videlicet ſi fuerit $\div\ a.\ b.\ c$, erit $a+c=2\ b$. Eſt enim $\div\ a.\ b.\ c$ perinde ac $a-b=b-c$.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA II.

Si fuerint quatuor magnitudines, ex quibus ſumma extremarum ſit æqualis ſummæ mediarum, illæ erunt Arithmetice proportionales.

197. Sint quatuor magnitudines a, b, c, d, ex quibus ſumma $a+d$ extremarum ſit æqualis ſummæ $b+c$ mediarum. Dico, eſſe $a-b=c-d$.

Demonſtratio.

Quandoquidem, cum ſit per hypotheſim $a+d=b+c$, erit quoque $a+d-b=b+c-b$, ſive $a+d-b=c$ (*Syn. Alg* §. 265.). Quamobrem, ſi utrique membro hujus æquationis ſubducatur eadem quantitas d, erit $a+d-b-d$, ſive $a-b=c-d$ (*Syn. Alg.* § 266.). Si fuerint ergo quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres magnitudines, ex quibus ſumma extremarum ſit æqualis duplo mediæ, illæ erunt continuo Arithmetice proportionales.

198. Si nimirum fuerit $a+c=2b$, erit $\div$ $a.b.c$. Hac enim facta hypotheſi, habetur $a-b=b-c$ (§. 197.), ſive $\div$ $a.b.c$.

PROBLEMA I.

Datis duobus magnitudinibus, mediam Arithmetice proportionalem invenire.

199. Inter duas a, d mediam Arithmetice proportionalem invenire oporteat.

Reſolutio.

Summa $a+d$ biſariam dividatur. Erit $\frac{a+d}{2}$ media quæſita.

Demonſtratio.

Facta namque hypotheſi, ut ſit $\frac{a+d}{2}=b$, erit $2b=a+d$ (§. 11.), ac proinde $\div$ $a.b.d$ (§. 198.).

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam Arithmetice proportionalem invenire.

200. Datis a, b, invenire oporteat tertiam Arithmetice proportionalem.

Reſolutio.

Duplo ſecundæ magnitudinis b, nempe $2b$, ſubducatur prima a. Reſiduum $2b-a$ erit tertia proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Quandoquidem ſi ponatur $2b-a=d$, erit $a+d=2b$ (*Syn. Alg.* §. 23.); atque adeo $\div$ $a.\ b.\ d$ (§. 198.).

PROBLEMA III.

Datis tribus magnitudinibus, quartam Arithmetice proportionalem invenire.

201. Datis tribus magnitudinibus a, b, c, quartam Arithmetice proportionalem invenire oporteat.

Reſolutio.

Fiat ſumma $b+c$ ex ſecunda b, & tertia c, eique ſubducatur prima a. Reſiduum $b+c-a$ erit quarta proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Si namque ponatur $b+c-a=d$, erit $a+d=b+c$ (*Syn. Alg.* §. 23.). Igitur erit etiam $a-b=c-d$ (§. 197.).

DEFINITIO IV.

202. *Tres magnitudines dicuntur harmonice proportionales, cum differentia primæ, & ſecundæ eam habet proportionem ad differentiam ſecundæ, & tertiæ, quam habet prima ad tertiam, Quatuor ſimiliter magnitudines harmonice proportionales vocantur, cum differentia primæ & ſecundæ eſt ad differentiam tertiæ & quartæ, ut prima ad quartam.* Sic *harmonice* proportionales erunt tres magnitudines a, b, c, ſi fuerit $a-b.\ b-c=a.\ c$, vel $b-a.\ c-b=a.\ c$. Quatuor itidem magnitudines a, b, c, d erunt *harmonice* proportionales, ſi fuerit $a-b.\ c-d=a.\ d$, vel $b-a.\ d-c=a.\ d$.

DEFINITIO V.

203. *Tres magnitudines dicuntur contraharmonice proportionales, ſi differentia primæ & ſecundæ fuerit ad differentiam ſecundæ & tertiæ, ut tertia ad primam. Quatuor itidem magnitudines ſunt contraharmonice proportionales, cum differentia primæ & ſecundæ eam habet rationem ad differentiam tertiæ & quartæ, quam habet illarum quarta ad primam.* Nimirum *contraharmonice* proportionales erunt tres magnitudines a, b, c, ſi fuerit $a-b \,.\, b-c = c \,.\, a$, vel $b-a \,.\, c-b = c \,.\, a$. Quatuor quoque a, b, c, d erunt *contraharmonice* proportionales, ſi fuerit $a-b \,.\, c-d = d \,.\, a$, aut $b-a \,.\, d-c = d \,.\, a$.

THEOREMA III.

Si prima trium magnitudinum Arithmetice proportionalium multiplicetur ſeorſim per ſecundam & tertiam, & ſecunda in tertiam ducatur, tria hujuſmodi producta erunt harmonice proportionalia.

204. Eſto $\div\, a \,.\, b \,.\, c$. Ducta autem a primo in b, deinde in c, fiant producta ab, ac. Multiplicata quoque ſecunda b per tertiam c, fiat productum bc. Dico eſſe $ab-ac \,.\, ac-bc = ab \,.\, bc$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\div\, a \,.\, b \,.\, c$, erit $a+c=2b$ (§.196.); atque adeo ſi utrumque membrum hujus æquationis multiplicetur per eandem quantitatem abc, erit $aabc+cabc=2babc$ (§.80.); ac proinde $aabc-babc=babc-cabc$ (§.198.) Eſt autem $babc-cabc$, ſive $abbc-acbc$ productum extremarum $ab-ac$, bc, & $aabc-babc$, ſive $acab-bcab$ productum mediarum $ac-bc$, ab (*Syn. Alg.* §.60.) Ergo erit $ab-ac \,.\, ac-bc = ab \,.\, bc$ (§. 84). Itaque ſi prima trium magnitudinum &c. quod erat oſtendendum.

PROBLEMA IV.

Datis duabus magnitudinibus, mediam harmonice proportionalem invenire.

205. Inter duas magnitudines a, b mediam harmonice proportionalem invenire oporteat.

Reſolutio.

Multiplicatis inter ſe mutuo magnitudinibus datis a, b, duplum facti ab, ſcilicet $2ab$, dividatur per illarum ſummam $a+b$. Quotus $\frac{2ab}{a+b}$ erit media harmonice proportionalis inter ipſas a, b.

Demon-

Demonſtratio.

Media harmonice proportionalis inter duas a, b ponatur x. Igitur erit $x - a \,.\, b - x = a \,.\, b$ (§. 202.), ac proinde $\overline{x - a} \times b = \overline{b - x} \times a$, ſive $xb - ab = ba - xa$ (§. 82.), atque adeo $xb + xa = 2ab$ (§. 196.). Conſtat autem, eſſe $\frac{xb + xa}{a + b} = x$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Ergo erit quoque $\frac{2ab}{a+b} = x$ (§. 82.); adeoque &c.

PROBLEMA V.

Datis duabus magnitudinibus, tertiam harmonice proportionalem invenire.

206. Sint duæ magnitudines a, b. Invenire oporteat tertiam harmonice proportionalem.

Reſolutio.

Factum ab ex ductu magnitudinis a in magnitudinem b dividatur per $2a - b$, per duplum ſcilicet primæ a imminutum ſecunda b. Quotus $\frac{ab}{2a - b}$ erit tertia harmonice proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Magnitudo x ſit tertia harmonice proportionalis, eſto nimirum $b - a \,.\, x - b = a \,.\, x$. Igitur erit $bx - ax = ax - ba$ (§. 82.), adeoque $bx + ba = 2ax$ (§. 196.), nec non $2ax - bx = ba$ (*Syn. Alg.* §. 296.). Manifeſtum eſt autem, eſſe $\frac{2ax - bx}{2a - b} = x$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Ergo erit quoque $\frac{ab}{2a - b} = x$ (§. 81.); ac proinde &c.

PROBLEMA VI.

Datis tribus magnitudinibus, quartam harmonice proportionalem invenire.

207. Sint tres magnitudines a, b, c. Invenire oporteat quartam harmonice proportionalem.

Re-

Reſolutio.

Factum ac ex ductu primæ a in tertiam c dividatur per $2a - b$, videlicet per duplum primæ a imminutum ſecundæ b. Quotus $\frac{ac}{2a - b}$ erit quarta harmonice proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Quantitas x ponatur quarta harmonice proportionalis, eſtò nimirum $b - a . x - c = a . x$. Igitur erit $bx - ax = ax - ac$ (§. 82.), & hinc $bx + ac = 2ax$ (§. 196.), nec non $2ax - bx = ac$ (*Syn. Alg.* §. 266.). Perſpicuum porro eſt, eſſe $\frac{2ax - bx}{2a - b} = x$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Ergo erit quoque $\frac{ac}{2a - b} = x$ (§. 81.); ac proinde &c.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER II.

De progreſſionibus Arithmetica, & Geometrica tam finita, quam infinita.

De *progreſſionibus* eximia prorſus, & ſingularia tradidit ſummus Geometra P. Gregorius a S. Vincentio, ut, Tacqueto teſte, nonniſi ſpicas ex ſua meſſe ceteris colligendas reliquerit. Nos pauca dumtaxat, præcipua tamen, quæ ad illarum theoriam, & praxim ſpectant, hoc in libro tradem us & explicabimus.

DEFINITIO I.

1. *Progreſſio in genere eſt ſeries plurium magnitudinum ſecundum eandem proportionem continuo creſcentium, vel decreſcentium.* Si termini continue augeantur, progreſſio dicitur *aſcendens*, *deſcendens* vero, ſi continue decreſcant. Utraque ſimiliter vel *finita* eſt, vel *infinita*, prout nimirum earum termini numero finiti ſunt, vel infiniti.

DEFINITIO II.

2. Duo quicumque termini a, h progreſſionis $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.\ h$ æqualiter hinc inde diſtare dicuntur a duobus intermediis d, e, cum tot ſunt termini inter primum a, & ſecundum d, quot inter tertium e, & quartum h. Duo ſimiliter a, g in progreſſione $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g$ dicuntur hinc inde æqualiter diſtare a medio d, ſi tot numerentur termini a primo a ad medium d, quot ab eodem medio d ad tertium g.

SYMPTOMATA

Progreſſionis Arithmeticæ.

DEFINITIO III.

3. *Progreſſio Arithmetica eſt ſeries magnitudinum continue Arithmetice proportionalium.* Hujuſmodi eſt ſeries magnitudinum $a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m.\ a+4m.$

$a+4m$. $a+5m$ &c., quemadmodum etiam ſeries magnitudinum a. $a-m$ $a-2m$. $a-3m$. $a-4m$. $a-5m$. Altera enim progreſſionem Arithmeticam *aſcendentem*; altera progreſſionem Arithmeticam *deſcendentem* exhibet.

Corollarium I.

4. *Quilibet terminus progreſſionis Arithmeticæ aſcendentis continet primum, ſeu minimum, & inſuper toties communem exceſſum, quot a primo* incluſive *ad ipſum* excluſive *termini numerantur*. Sic terminus $a+4m$ progreſſionis a. $a+m$. $a+2m$. $a+3m$. $a+4m$. $a+5m$, præter primum a, quater complectitur communem exceſſum m, ſicuti quatuor ſunt termini a minimo a *incluſive* ad ipſum $a+4m$ *excluſive*.

Corollarium II.

5. Hinc *maximus terminus progreſſionis Arithmeticæ finitæ aſcendentis toties continet communem exceſſum, præter terminum minimum, quot in ipſa progreſſione ſunt termini, uno demto*.

Corollarium III.

6. *Differentia duorum quorumcunque terminorum in progreſſione Arithmetica toties continet communem exceſſum, quot termini ab illorum uno* incluſive *ad alterum* excluſive *numerantur*. Sic differentia $3m$ termini $a+5m$ ſupra terminum $a+2m$ in progreſſione a. $a+m$. $a+2m$. $a+3m$. $a+4m$. $a+5m$. $a+6m$ ter complectitur exceſſum m, ſicuti tres ſunt termini ab uno $a+2m$ *incluſive* ad $a+5m$ *excluſive*.

Theorema I.

In progreſſione Arithmetica quatuor quicunque termini, quorum duo extremi æqualiter diſtent a mediis, ſunt Arithmetice proportionales.

7. In progreſſione Arithmetica a. $a+m$. $a+2m$. $a+3m$. $a+4m$. $a+5m$. $a+6m$. $a+7m$. $a+8m$. $a+9m$ quatuor ſpectentur termini $a+m$, $a+4m$, $a+6m$, $a+9m$, quorum duo extremi $a+m$, $a+9m$ æqualiter diſtent a mediis $a+4m$, $a+6m$. Dico, eos eſſe Arithmetice proportionales.

Demonſtratio.

Eſt enim ob hypotheſim $a+4m - a+m = a+9m - a+6m = 3m$ (§. 2.). Ergo erit $a+m$. $a+4m$ :: $a+6m$. $a+9m$ (*Lib. I.* §. 190.). In omni igitur progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

Digitized by Google

Corollarium.

In omni progreſſione Arithmetica ſumma duorum quorumlibet terminorum adæquat ſummam aliorum duorum æqualiter hinc inde ab illis diſtantium.

8. In progreſſione Arithmetica $a \,.\, b \,.\, e \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g$ erit $a+g = b+f = c+e$. Cum enim ſit $a \,.\, b$ ::: $f \,.\, g$ erit $a+g = b+f$. Similiter ex eo quod habeatur $a \,.\, c$ ::: $e \,.\, g$, erit $a+g = c+e$. Demum cum ſit $b \,.\, c$ ::: $e \,.\, f$, erit quoque $b+f = c+e$ (§.195.). Ergo erit $a+g = b+f = c+e$ (*Syn. Alg.* §.260. 261).

THEOREMA II.

Tres quicunque termini in progreſſione Arithmetica, quorum duo extremi æqualiter diſtent a medio, ſunt continuo Arithmetice proportionales.

9. In progreſſione Arithmetica $a \,.\, a+m \,.\, a+2m \,.\, a+3m \,.\, a+4m \,.\, a+5m \,.\, a+6m \,.\, a+7m$ tres termini ſpectentur $a+m$, $a+4m$, $a+7m$, quorum duo extremi $a+m$, $a+7m$ æqualiter diſtent a medio $a+4m$. Dico, eos eſſe continuo Arithmetice proportionales.

Demonſtratio.

Ea enim in hypotheſi habetur $a+7m - a+4m = a+4m - a+m = 3m$ (§. 6.). Igitur erit $\div$ $a+m \,.\, a+4m \,.\, a+7m$ (*Lib. I.* §. 190.). Ergo tres quicunque &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium.

In omni progreſſione Arithmetica ſumma duorum quorumlibet terminorum eſt dupla illius, a quo duo ipſi termini æqualiter hinc inde diſtant.

10. Sic in progreſſione Arithmetica $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g$ erit $a+g = 2d$. Quandoquidem habetur per hypotheſim $\div$ $a \,.\, d \,.\, g$ (§. 9.). Ergo erit $a+g = 2d$ (*Lib. I.* §. 196.)

THEOREMA III.

Summa progreſſionis Arithmeticæ adæquat productum, quod fit multiplicando ſummam ex maximo, & minimo termino per dimidium numeri terminorum totius progreſſionis.

11. Duo caſus pro demonſtratione hujus theorematis diſtinguendi ſunt, alter ſcilicet, in quo numerus terminorum totius progreſſionis ſit par, alter, in quo ſit impar.

Ca-

Caſus I.

Eſto progreſſio Arithmetica $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$, cujus ſex ſint termini. Dico, $\overline{a+f}\times 3$, ſeu $3a+3f$, factum ex multiplicatione ſummæ $a+f$ extremorum per 3, dimidium ſcilicet numeri 6 terminorum totius progreſſionis, æquare ipſius ſummam $a+b+c+d+e+f$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a+f=b+e=c+d$ (§. 8.), erit $3a+3f=a+f+b+e+c+d$ (*Syn. Alg.* §. 259.). Hoc autem aggregatum eſt ſumma totius progreſſionis, ut eſt evidens. Ergo $3a+3f$ eſt ſumma totius progreſſionis.

Caſus II.

Modo numerus terminorum datæ progreſſionis ſit impar, eſto nempe progreſſio $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.$ Dico, ſummam totius progreſſionis æquare factum ex ſumma $a+g$ extremorum multiplicata per $3\frac{1}{2}$, ſcilicet per dimidium numeri terminorum.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a+g=b+f=c+e$ (§. 8.), erit $3a+3g=a+g+b+f+c+e$, ac proinde $3a+3g+d=a+g+b+f+c+e+d$ (*Syn. Alg.* §. 265.). Eſt autem $\frac{a+g}{2}=d$ (§. 10.). Ergo erit $3a+3g+\frac{a-g}{2}=a+g+b+f+c+e+d$ (*Syn. Alg.* §. 265.). Conſtat autem, magnitudinem $a+g+b+f+c+e+d$ eſſe ſummam totius progreſſionis. Ergo etiam $3a+3g+\frac{a+g}{2}$ ſummam totius datæ progreſſionis æquabit (*Syn. Alg.* §. 261.). Manifeſtum porro eſt, eſſe $3a+3g+\frac{a+g}{2}=\overline{a+g}\times 3\frac{1}{2}$. Ergo $\overline{a+g}\times 3\frac{1}{2}$ æquabit ſummam datæ progreſſionis. Summa igitur progreſſionis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Si ſumma ex maximo, & minimo termino Arithmeticæ progreſſionis ducatur in numerum terminorum, productum, quod hinc efficitur, eſt duplum ſummæ totius progreſſionis.

12. Ut ſi maximus terminus datæ progreſſionis fuerit a, minimus p, & numerus terminorum x, erit $\overline{a+p}\times x$, ſive $ax+px$ duplum ſummæ totius progreſſionis.

COROLLARIUM II.

Si ſumma ex maximo, & minimo termino Arithmeticæ progreſſionis ducatur in numerum terminorum, & productum per binarium dividatur, quotus erit totius progreſſionis ſumma.

13. Erit nempe $\frac{ax+px}{2}$ ſumma progreſſionis, cujus maximus terminus ſit a, minimus p, & numerus terminorum x. Patet ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

Summa progreſſionis Arithmeticæ adæquat productum, quod fit multiplicando numerum terminorum totius progreſſionis per ſemiſſem ſummæ extremorum.

14. Videlicet iiſdem poſitis erit $x\times\frac{a+p}{2}$ ſumma totius progreſſionis: Eſt enim idem productum, quod efficitur, ſive x per $\frac{a+p}{2}$, ſive $a+x$ per $\frac{x}{2}$ multiplicetur.

COROLLARIUM IV.

Si numerus terminorum Arithmeticæ progreſſionis fuerit impar, productum ex ductu medii termini in numerum terminorum æquale erit ſummæ totius progreſſionis.

15. Nimirum ſi impar fuerit numerus x datæ progreſſionis, cujus maximus terminus ſit a, minimus p, & medius d, erit dx ſumma totius progreſſionis. Cum enim tunc ſit $\frac{a+p}{2} = d$ (§. 10.), erit quoque $\frac{a+p}{2}\times x$ =

$= d \times x$ (*Lib. I. §.* 80.). Factum autem $\frac{ax+px}{2}$ adæquat ſummam totius progreſſionis (§. 13.), Ergo eam quoque æquabit factum dx (*Syn. Alg.* §. 261.).

PROBLEMA I.

Ultimo terminorum, & exceſſu datis, progreſſionem Arithmeticam continuare.

16. Poſtremus terminus datæ progreſſionis ſit d, & communis exceſſus m. Progreſſionem ipſam continuare oporteat.

Reſolutio.

Si progreſſio ſit *aſcendens*, communis exceſſus m adiiciatur poſtremo termino d, & fiat $d+m$, cui iterum adiiciatur exceſſus ipſe, & ſic deinceps. Si vero progreſſio fuerit *deſcendens*, exceſſus m ſubducatur termino poſtremo d, tum ex reſiduo $d-m$ idem exceſſus auferatur, atque ita deinceps. Habebitur in primo caſu progreſſio *aſcendens* .... $d+m$. $d+2m$. $d+3m$ &c. In ſecundo vero progreſſio *deſcendens* ...... $d-m$. $d-2m$. $d-3m$ &c.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex ipſa natura progreſſionis Arithmeticæ tam *aſcendentis*, quam *deſcendentis*.

COROLLARIUM.

Si primus terminus progreſſionis Arithmeticæ deſcendentis fuerit magnitudo finita, progreſſio ipſa continuari nequit in infinitum per terminos poſitivos.

17. Communis namque exceſſus, quia continuè ſubtrahitur, aliquoties ſumtus ſummam tandem conſtituit primo termino æqualem.

PROBLEMA II.

Datis numero terminorum, exceſſu, & minimo termino progreſſionis, maximum ejuſdem terminum invenire.

18. Numerus terminorum datæ progreſſionis Arithmeticæ ſit x, communis exceſſus m, & minimus terminus p. Invenire oporteat terminum maximum.

Reſolutio.

Numerus terminorum unitate mulctatus, ſcilicet $x-1$, multiplicetur per communem exceſſum m, & producto $mx-m$ adiiciatur minimus terminus p. Erit $mx-m+p$ maximus terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Patet ex §. 5.

PROBLEMA III.

Datis maximo termino progreſſionis, numero terminorum, & communi exceſſu, invenire terminum minimum.

19. Maximus terminus datæ progreſſionis Arithmeticæ ſit a, numerus terminorum x, & communis exceſſus m. Invenire terminum ejuſdem minimum.

Reſolutio.

Numerus terminorum unitate mulctatus, ſcilicet $x-1$, multiplicetur per communem exceſſum m, & productum $xm-m$ ſubducatur maximo termino a. Erit $a-xm+m$ minimus terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Cum enim maximus Arithmeticæ progreſſionis terminus toties, præter terminum ejuſdem minimum, communem exceſſum complectatur, quot in ipſa progreſſione numerantur termini, demto uno (§. 5.), ſi communis exceſſus multiplicetur per numerum terminorum unitate mulctatum, fiet productum, quod a maximo termino deficiet valore termini minimi. Ergo &c.

PROBLEMA IV.

Datis numero terminorum, maximo & minimo termino; communem exceſſum invenire.

20. Numerus terminorum datæ progreſſionis ſit x, maximus terminus a & minimus p. Invenire communem exceſſum.

Reſo-

Reſolutio.

Minimus terminus p auferatur a maximo a, & reſiduum $a-p$ dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, ſcilicet per $x-1$. Erit $\frac{a-p}{x-1}$ exceſſus quæſitus.

Demonſtratio.

Sicuti namque, ſi numerus terminorum unitate mulctatus multiplicetur per communem exceſſum, fit maximus terminus minimo imminutus (§ 19), ita viciſſim, ſi maximus progreſſionis terminus minimo imminutus dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, conſectarium eſt, ut *quotus* ſit communis exceſſus (*Syn. Alg.* §. 67.). Igitur &c.

PROBLEMA V.

Datis maximo & minimo termino progreſſionis Arithmeticæ, ſimulque numero terminorum, illius ſummam invenire.

21. Maximus terminus datæ progreſſionis ſit a, minimus p, & numerus terminorum x. Totius progreſſionis ſummam invenire.

Reſolutio I.

Summa extremorum $a+p$ multiplicetur per $\frac{x}{2}$ dimidium numeri terminorum. Factum $\frac{ax+px}{2}$ erit ſumma quæſita.

Demonſtratio.

Patet ex §. 11.

Reſolutio II.

Summa extremorum $a+p$ multiplicetur per x integrum numerum terminorum, & productum $ax+px$ per *binarium* dividatur. Erit $\frac{ax+px}{2}$ ſumma totius progreſſionis.

Demon-

Demonſtratio.

Patet ex §. 13.

Reſolutio III.

Numerus x terminorum multiplicetur per $\frac{a+p}{2}$ ſemiſſem ſummæ extremorum. Factum erit ſumma quæſita.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 14.

PROBLEMA VI.

Datis numero terminorum, ſumma progreſſionis, & communi exceſſu; invenire maximum & minimum terminum.

22. Numerus terminorum ſit x, ſumma progreſſionis y, & communis exceſſus m. Maximum & minimum terminum ipſius progreſſionis invenire.

Reſolutio.

Summa progreſſionis y dividatur per numerum terminorum x, ſitque $\frac{y}{x} = p$. Numerus terminorum x unitate mulctatus, ſcilicet $x-1$, multiplicetur per communem exceſſum m, & factum $xm-m$ auferatur a *quoto* p, duplato, nempe a $2p$. Reſiduo $2p-xm+m$ bifariam diviſo, erit $\frac{2p-xm+m}{2}$ terminus minimus: maximus $xm-m+\frac{2p-xm+m}{2}$, qui fuerant quæſiti.

Demonſtratio.

Cum enim ſumma progreſſionis oriatur ex numero terminorum ducto in ſemiſſem ſummæ ex extremis (§. 14.), ſi ſumma progreſſionis per numerum terminorum dividatur, *quotus* erit ſemiſſis ſummæ extremorum (*Syn. Alg.* §. 67.). Facta igitur hypotheſi, ut ſit $\frac{x}{y} = p$, erit p ſemiſſis

ſum-

Digitized by Google

ſummæ extremorum, atque adeo $2p$ eorundem ſumma. Rurſus quoniam numerus terminorum unitate mulctatus, ſi per communem exceſſum multiplicetur, dat terminum maximum ipſius progreſſionis minimo imminutum (§. 18.), erit $xm-m$ maximus terminus progreſſionis imminutus minimo. Quamobrem ſi ſummæ $2p$ extromorum ſubducatur $xm-m$, erit $2p-xm+m$ duplum minimi; quatenus nempe ſummæ $2p$ ex maximo, & minimo ſubtrahitur valor $xm-m$, qui a maximo termino deficit valore termini minimi. Diviſo ergo $2p-xm+m$ per 2, *quotus* $\frac{2p-xm+m}{2}$ erit minimus terminus progreſſionis quæſitus. At vero terminus ejuſdem maximus $xm-m+\frac{2p-xm+m}{2}$.

SYMPTOMATA
Progreſſionis Geometricæ finitæ.

DEFINITIO IV.

23. *Progreſſio Geometrica tam aſcendens, quam deſcendens eſt ſeries magnitudinum continue inter ſe Geometrice proportionalium.* Ut ſi fuerit $a.b = b.c = c.d = d.e$, ſeries magnitudinum $a.b.c.d.e$ erit progreſſio Geometrica finita, *aſcendens* quidem ſi termini continuo augeantur; *deſcendens* vero, ſi continuo decreſcant.

DEFINITIO V.

24. *Denominator progreſſionis Geometricæ eſt exponens rationis, ſecundum quam termini ſeſe conſequuntur.* Ut ſi in progreſſione $a.b.c.d.e$ fuerit $\frac{a}{b} = m$, quantitas m erit denominator ipſius progreſſionis $a.b.c.d.e$.

THEOREMA IV.

Quatuor quicunque termini progreſſionis Geometricæ, quorum extremi æqualiter diſtent a mediis, ſunt Geometrice proportionales.

25. In progreſſione Geometrica $a.b.c.d.e.f.g.h$ quatuor ſpectentur termini a, d, e, h, quorum duo extremi a, h æqualiter diſtent a mediis d, e. Dico, eſſe $a.d = e.h$.

Demon.

Demonſtratio.

Denominator progreſſionis ſit m, atque adeo $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=m$, ſicuti etiam $\frac{e}{f}=\frac{f}{g}=\frac{g}{b}=m$ (§. 24.). Erit ergo $\frac{a}{d}=\frac{e}{b}=m^3$ (*Lib. I.* §. 177., & §. 57.), ac propterea $a.d=e.b$ (*Lib. I.* §. 34.). Igitur quatuor &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

In omni progreſſione Geometrica productum duorum terminorum extremorum adæquat productum duorum quorumlibet mediorum, a quibus extremi æqualiter hinc inde diſtent.

26. In progreſſione nimirum Geometrica $a.b.c.d.e.f.g$ erit $ag=ce$. Enimvero cum ſit $a.c=e.g$ (§. 25.), erit quoque $ag=ce$ (*Lib. I.* §. 195.)

THEOREMA V.

In omni progreſſione Geometrica tres quicunque termini, quorum duo extremi æqualiter diſtent a medio, ſunt continuè proportionales.

27. In progreſſione Geometrica $a.b.c.d.e.f.g$ tres ſumantur termini a, d, g, quorum duo extremi a, g æqualiter diſtent a medio d. Dico, eſſe ∺ $a.d.g$.

Demonſtratio.

Coincidit cum demonſtratione theorematis præcedentis. Etenim ſi denominator progreſſionis ſit m, erit $\frac{a}{d}=\frac{d}{g}=m^3$ (*Lib. I.* §. 177., & §. 57.), ac proinde $a.d=d.g$, ſive ∺ $a.d.g$ (*Lib. I.* §. 34.). Itaque in omni &c. quod erat oſtendendum:

Corollarium.

In omni progreſſione Geometrica productum duorum quorumlibet terminorum æqualiter hinc inde a medio diſtantium eſt æquale quadrato medii.

28. Videlicet in progreſſione $a . b . c . d . e . f . g$ erit $ag = dd$. Id enim ex eo ſequitur, quod ſit $\div a . d . g$ (*Lib. I. §. 83.*).

Theorema VI.

In omni progreſſione Geometrica aſcendente, quæ ab unitate incipiat, tertius terminus ab unitate eſt quadratus, & ceteri omnes unum intermittentes: quartus ab unitate eſt cubus, & ceteri omnes duos intermittentes.

29. Eſto progreſſio Geometrica *aſcendens*, quæ ab unitate incipiat, videlicet $1 . a . b . c . d . e . f . g . h . m$. Dico, tertium b eſſe quadratum, ſicuti etiam ceteros omnes unum intermittentes, puta d, f, h. Quartum vero c eſſe cubum, quemadmodum etiam f, m, quos inter duo termini reperiuntur.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $1 . a = a . b$, erit etiam $a . 1 = b . a$ (*Lib. I. §. 121.*). Eſt autem $\frac{a}{1} = a$ (*Lib. I. §. 10.*). Ergo erit quoque $\frac{b}{a} = a$ (*Lib. I. §. 34.*), atque adeo $aa = b$ (*Lib. I. §. 11.*). Similiter cum ſit $a . b = b . c$, habebitur quoque $b . a = c . b$ (*Lib. I. §. 121.*); cumque ſit $\frac{b}{a} = a$, erit etiam $\frac{c}{b} = a$ (*Lib. I. §. 34.*), & ideo ab, ſive $aaa = c$ (*Lib. I. §. 11.*). Eadem ratione demonſtrabitur, eſſe $d = a^4$, $e = a^5$, $f = a^6$, $g = a^7$, $h = a^8$, $m = a^9$; ut proinde progreſſioni $1 . a . b . c . d . e . f . g . h . m$ hæc alia ſubſtitui poſſit $1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7 . a^8 . a^9$. Manifeſtum eſt autem, terminos a^2, a^4, a^6, a^8 eſſe quadratos; cum ex terminis a, a^2, a^3, a^4 in ſe ductis conſurgant, terminos vero a^3, a^6, a^9 eſſe cubos; cum fiant ex quadratis a^2, a^4, a^6 multiplicatis per ſuas radices a, a^2, a^3. Ergo termini quoque b, d, f, h ſunt quadrati; cubici vero termini c, f, m, ac proinde in omni progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

THEOREMA VII.

In progreſſione Geometrica finita ut differentia maximi termini ſupra proxime minorem ad ipſum terminum proxime minorem maximo, ita exceſſus maximi ſupra minimum ad omnes ſimul reliquos terminos collective ſumtos.

30. Eſto progreſſio Geometrica deſcendens $a . b . c . d . e$. Dico, $a-e$, differentiam maximi termini a ſupra minimum e, eſſe ad ſummam reliquorum $b+c+d+e$, ut eſt $a-b$, exceſſus maximi a ſupra proxime minorem b, ad ipſum b, videlicet eſſe $a-e . b+c+d+e = a-b . b$.

Demonſtratio.

Multiplicatis namque extremis $a-e$, b, atque mediis $b+c+d+e$, $a-b$ inter ſe mutuo *reſpective*, producta fiunt æqualia. Eſt enim $\overline{a-e} \times b = ab - eb$, & $\overline{b+c+d+e} \times \overline{a-b} = ab+ac+ad+ae-bb-bc-bd-be$ (*Syn. Alg.* §. 55. & §. 60.). Conſtat autem, eſſe $ac = bb$ (§. 28.), $ad = bc$, & $ae = bd$ (§. 26.); ac proinde tam $+ac-bb$, quam $+ad-bc$, nec non $+ae-bd = 0$, & ideo $ab+ac+ad+ae-bb-bc-bd-be = ab-be$, quod eſt etiam productum extremorum $a-e$, b, ut patet. Ergo erit $a-e . b+c+d+e = a-b . b$ (*Lib.* I. §. 84.). Itaque in omni progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In progreſſione Geometrica finita ut ipſius denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita maximus ejuſdem terminus minimo imminutus ad omnes reliquos collective ſumtos.

31. Ut ſi denominator progreſſionis Geometricæ deſcendentis $a . b . c . d . e$ fuerit m, erit $a-e . b+c+d+e = m-1 . 1$. Enimvero cum per hypotheſim habeatur $\frac{a}{b} = m$, erit $a . b = m . 1$. (*Lib.* I. §. 9.), ac proinde $a-b . b = m-1 . 1$ (*Lib.* I. §. 135.). Oſtenſum eſt autem, eſſe $a-e . b+c+d+e = a-b . b$. Ergo erit etiam $a-e . b+c+d+e = m-1 . 1$ (*Lib.* I. §. 78.).

Corollarium II.

In progreſſione dupla finita exceſſus maximi termini ſupra minimum adæquat ſummam omnium terminorum imminutam maximo, in progreſſione tripla exceſſus ille eſt duplus, in progreſſione quadrupla eſt triplus ſummæ omnium imminuta maximo termino, & ſic deinceps.

32. Ut ſi habeatur progreſſio deſcendens in ratione dupla $a.b.c.d.e$ erit $a-e=b+c+d+e$: ſi fuerit in ratione tripla, differentia $a-e$ erit dupla ſummæ $b+c+d+e$: ſi in ratione quadrupla, exceſſus $a-e$ erit triplus ſummæ $b+c+d+e$, atque ita deinceps. Patet ex præcedenti. Cum enim in primo caſu denominator progreſſionis ſit 2, in ſecundo 3, & in tertio 4, in primo erit $a-e.\, b+c+d+e=2-1.\,1$, in ſecundo $a-e.\, b+c+d+e=3-1.\,1$, & in tertio $a-e.\, b+c+d+e=4-1.\,1$. Eſt autem $2-1=1$, $3-1=2$, $4-1=3$. Ergo &c.

Theorema VIII.

Si exceſſus maximi termini ſupra minimum in progreſſione Geometrica finita dividatur per ipſius progreſſionis denominatorem unitate mulctatum, quotiens erit omnium ſumma maximo termino imminuta.

33. Eſto progreſſio Geometrica deſcendens $a.b.c.d.e$, cujus denominator ſit m. Dico, eſſe $\frac{a-e}{m-1}=b+c+d+e$.

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{a-e}{m-1}=y$. Erit ergo $my-y=a-e$ (*Lib.* I. §. 11.); ac proinde $a-e.\, y=m-1.\,1$ (*Lib.* I. §. 84), cum ſit $\overline{a-e}\times 1=a-e$, & $y\times\overline{m-1}=my-y$. Manifeſtum eſt autem, eſſe $a-e.\, b+c+d+e=m-1.\,1$ (§. 31.). Ergo erit etiam $a-e.\, b+c+d+e=a-e.\, y$ (*Lib.* I. §. 78.); atque adeo $y=b+c+d+e$ (*Lib.* I. §. 112.), ſive $\frac{a-e}{m-1}=b+c+d+e$. Itaque ſi exceſſus &c. quod erat oſtendendum.

Co-

Corollarium I.

Summa omnium terminorum progreſſionis Geometricæ finitæ imminuta maximo termino, ducta in illius denominatorem unitate mulctatum, efficit productum æquale maximo ejuſdem termino minimo diminuto.

34. Nimirum iiſdem poſitis, erit $\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1} \equiv a-e$. Id enim ex eo manifeſte ſequitur, quod ſit $\frac{a-e}{m-1} \equiv b+c+d+e$.

Corollarium II.

Si exceſſus maximi termini ſupra minimum in progreſſione Geometrica finita dividatur per ſummam omnium terminorum maximo diminutam, quotus erit denominator ipſius progreſſionis unitate mulctatus.

35. Videlicet, iiſdem poſitis, erit $\frac{a-e}{b+c+d+e} \equiv m-1$. Cum enim ſit $\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1} \equiv a-e$ (§. 34.), quemadmodum eſt $\frac{\overline{b+c+d+e} \times \overline{m-1}}{b+c+d+e} \equiv m-1$ (*Syn. Alg.* §. 67.), erit quoque $\frac{a-e}{b+c+d+e} \equiv m-1$.

THEOREMA IX.

In omni progreſſione Geometrica finita ut duorum maximorum terminorum differentia ad maximum terminum, ita exceſſus maximi ſupra minimum ad omnium ſummam mulctatam minimo.

36. Eſto progreſſio Geometrica deſcendens $a.\ b.\ c.\ d.\ e$. Dico, eſſe $a-e.\ \overline{a+b+c+d} \equiv a-b.\ a$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\overline{a+b+c+d} \times \overline{a-b} \equiv aa+ab+ac+ad-ba-bb-bc-bd$ (*Syn. Alg.* §. 54.), & $+ab-ab \equiv 0$, $ac \equiv bb$ (§. 28.), $ad \equiv bc$ (§. 26.), adeoque $+ac-bb \equiv 0$, ſicuti etiam $+ad-bc \equiv 0$, facta reductione, erit $aa+ab+ac+ad-ba-bb-bc-bd \equiv aa-bd$. Eſt autem $ae \equiv bd$ (§. 26.). Ergo erit $aa-ae \equiv aa-bd$ (*Syn. Alg.* §. 266.). Conſtat autem, $aa-ae$ eſſe productum extremorum $a-e$, a, & $aa-bd$ productum mediorum $a+b+c+d$, $a-b$. Igitur

Digitized by Google

tur productum extremorum æquabit productum mediorum; eritque $a-e.\,a+b+c+d = a-b.\,a$ (*Syn. Alg.* §. 54.). In omni ergo progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In omni progreſſione Geometrica finita ut denominator unitate mulctatus ad ſeipſum integrum, ita exceſſus maximi ſupra minimum ad omnium ſummam imminutam minimo.

37. Ut ſi denominator progreſſionis deſcendentis $a.\,b.\,c.\,d.\,e.$ ſuerit m, erit $a-e.\,a+b+c+d = m-1.\,m$. Cum enim ſit per hypotheſim $\frac{a}{b} = m$, erit $a.\,b = m.\,1$ (*Lib.I.* §.9.); ac proinde $a-b.\,a = m-1.\,m$ (*Lib* I. §.141.). Eſt autem $a-e.\,a+b+c+d = a-b.\,a$ (§.36.). Ergo erit quoque $a-e.\,a+b+c+d = m-1.\,m$ (*Lib. I.* §.78.).

COROLLARIUM II.

In omni progreſſione Geometrica finita ut eſt ipſius denominator ad ſeipſum unitate mulctatum, ita ſumma omnium terminorum minimo diminuta ad exceſſum maximi ſupra minimum.

38. Videlicet, iiſdem poſitis, erit, $a+b+c+d.\,a-e = m.\,m-1$. Etenim cum jam ſit $a-e.\,a+b+c+d = m-1.\,m$, erit etiam $a+b+c+d+.\,a-e = m.\,m-1$ (*Lib.* I. §. 121.).

COROLLARIUM III.

Si ſumma omnium terminorum progreſſionis Geometricæ finitæ, minimo termino diminuta, per illius denominatorem unitate mulctatum multiplicetur, & productum per eundem integrum dividatur, quotus erit maximus ejuſdem terminus mulctatus minimo.

39. Nimirum, iiſdem poſitis, erit $\frac{\overline{a+b+c+d} \times \overline{m-1}}{m} = \overline{a-e}$. Quandoquidem cum ſit $a-e.\,a+b+c+d = m-1.\,m$ (§.37), erit $\overline{a-e} \times m = \overline{a+b+c+d} \times \overline{m-1}$ (*Lib.* I. §. 82.), atque adeo $\frac{\overline{a+b+c+d} \times \overline{m-1}}{m} = \frac{\overline{a-e} \times m}{m}$

Digitized by Google

(*Lib.*I.§.81.). Manifeſtum eſt autem, eſſe $\frac{\overline{a-e}\times m}{m} = a-e$ (*Syn. Alg.* §. 72.).

Ergò erit etiam $\frac{\overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}}{m} = a-e$ (*Lib* I. §. 81.).

COROLLARIUM IV.

Si in progreſſione Geometrica finita exceſſus maximi termini ſupra minimum multiplicetur per ipſius denominatorem, & productum per eundem denominatorem unitate mulctatum dividatur, quotus erit ſumma totius progreſſionis minimo termino imminuta.

40. Etenim, iiſdem poſitis, cum ſit $\overline{a-e}\times m = \overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}$, & $\frac{\overline{a+b+c+d}\times\overline{m-1}}{\overline{m-1}} = a+b+c+d$ (*Syn. Alg.* §. 72.), erit etiam $\frac{am-em}{m-1} =$ $a+b+c+d$ (*Lib.* I. §. 81.).

PROBLEMA VII.

Dato primo termino progreſſionis Geometricæ conſtituendæ, ejuſque denominatore, progreſſionem ipſam conſtituere.

I.

41. Conſtituere oporteat progreſſiónem Geometricam aſcendentem, cujus primus terminus ſit a, denominator m.

Reſolutio.

Terminus a multiplicetur per denominatorem m, & fiat productum am. Hujuſmodi productum ducatur itidem in m, & fiat am^2, atque ita deinceps. Series factorum a. am. am^2. am^3. am^4. am^5. am^6. &c. erit progreſſio Geometrica quæſita.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $\frac{am}{a} = \frac{am^2}{am} = m$ (*Syn. Alg.* §. 72.), erit $am^2 \cdot am = am \cdot a$

(*Lib.I.*

Digitized by Google

(*Lib.I.* §. 44.), & invertendo, $a : am = am . am^2$. (*Ibid.* §. 171.), eandemque ob cauſam erit quoque $am . am^2 = am^2 . am^3$ atque ita deinceps. Ergo &c.

II.

42. Conſtituenda modo ſit progreſſio Geometrica deſcendens, cujus primus terminus ſit a, denominator m.

Reſolutio.

Terminus a dividatur per denominatorem m, & quotus $\frac{a}{m}$ iterum per m, & ſic deinceps. Series quotientum $a . \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3} . \frac{a}{m^4} . \frac{a}{m^5}$ &c. erit progreſſio deſcendens quæſita.

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit $a \times \frac{a}{m^2} = \frac{a}{m} \times \frac{a}{m} = \frac{aa}{m^2}$, erit quoque $a . \frac{a}{m} = \frac{a}{m} . \frac{a}{m^2}$ (*Lib. I.* §. 82.), & eadem ratione erit etiam $\frac{a}{m} . \frac{a}{m^2} = \frac{a}{m^2} . \frac{a}{m^3}$ & ſic deinceps.

Corollarium I.

43. Eodem modo continuabitur data quævis progreſſio Geometrica tam *aſcendens*, quam *deſcendens*, quouſque libuerit.

Corollarium II.

44. *Quivis terminus progreſſionis Geometricæ aſcendentis eſt factum ex ductu primi termini in eam denominatoris poteſtatem, cujus exponens eſt numerus terminorum præcedentium: Quivis autem terminus progreſſionis Geometricæ deſcendentis eſt quotus primi termini diviſi per illam denominatoris poteſtatem, cujus exponens eſt numerus terminorum, qui datum ipſum terminum præcedunt.* Patet ex formula, qua utraque progreſſio exprimitur.

PROBLEMA VIII.

Datis primo termino progreſſionis, ejuſque denominatore, terminum quemcunque invenire.

I.

45. Primus terminus progreſſionis aſcendentis ſit a, & denominator m. Invenire oporteat ſextum ejuſdem progreſſionis terminum.

Reſolutio.

Quoniam quinque ſunt termini, qui in ipſa progreſſione terminum quæſitum præcedunt, primus terminus a multiplicetur per quintam denominatoris m poteſtatem, ſcilicet per m^5. Erit am^5 terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 44.

I I.

46. Primus terminus progreſſionis deſcendentis ſit a, & denominator m. Invenire oporteat ſextum terminum ipſius progreſſionis.

Reſolutio.

Terminus a dividatur per quintam poteſtatem denominatoris m, videlicet per m^5. Fractio $\frac{a}{m^5}$ erit terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Patet ex eodem §. 44.

PROBLEMA IX.

Data ſumma progreſſionis Geometricæ finitæ, ejuſque denominatore, & minimo termino, invenire maximum.

47. Summa datæ progreſſionis ſit a, denominator m, & minimus terminus y. Invenire oporteat terminum ejuſdem maximum.

Reſo-

Reſolutio.

Summæ a dematur minimus y, & reſiduum $a-y$ multiplicetur per denominatorem m unitate mulctatum, ſcilicet per $m-1$. Factum vero $am-my-a+y$ dividatur per integrum denominatorem m, & *quoto* adiiciatur terminus minimus y. Erit $\frac{am-my-a+y}{m}+y$ maximus terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Eſt enim *quotus* $\frac{am-my-a+y}{m}$ exceſſus maximi termini datæ progreſſionis ſupra terminum ejuſdem minimum (§. 39.). Ergo &c.

PROBLEMA X.

Datis denominatore progreſſionis Geometricæ finitæ, ejuſque ſumma, & maximo termino, invenire minimum.

48. Summa datæ progreſſionis ſit x, maximus terminus a, & denominator m. Invenire terminum ejuſdem minimum.

Reſolutio.

Summa x maximo termino a diminuta, ſcilicet $x-a$, multiplicetur per $m-1$, denominatorem unitate mulctatum, & productum $mx-ma-x+a$ ſubducatur termino maximo a. Erit $a-mx+ma+x-a$ minimus terminus quæſitus.

Demonſtratio.

Quippe productum $mx-ma-x+a$ deficit a maximo termino a toto valore minimi termini ipſius progreſſionis (§. 34.). Ergo &c.

PROBLEMA XI.

Datis extremis terminis progreſſionis Geometricæ finitæ, ejuſque ſumma, denominatorem invenire.

49. Invenire oporteat denominatorem progreſſionis Geometricæ finitæ, cujus ſumma ſit x, maximus terminus a, & minimus y.

Reſolutio.

Differentia $a-y$ maximi termini a a minimo y dividatur per ſummam totius progreſſionis maximo termino imminutam, ſcilicet per $x-a$. Quotus $\frac{a-y}{x-a}$ unitate auctus, nempe $\frac{a-y}{x-a}+1$, erit denominator quæſitus.

Demonſtratio.

Eſt enim *quotus* $\frac{a-y}{x-a}$ denominator datæ progreſſionis unitate mulctatus (§. 35.).

PROBLEMA XII.

Datis maximo, & minimo termino progreſſionis Geometricæ finitæ, ejuſque denominatore, ſummam totius progreſſionis invenire.

50. Invenire oporteat ſummam progreſſionis Geometricæ finitæ, cujus maximus terminus ſit a, minimus y, & denominator m.

Reſolutio I.

Exceſſus maximi termini a ſupra minimum y dividatur per denominatorem m unitate mulctatum, & *quoto* adjiciatur maximus terminus a. Erit $\frac{a-y}{m-1}+a$ ſumma quæſita.

Demonſtratio.

Quotus namque $\frac{a-y}{m-1}$ eſt ſumma totius progreſſionis maximo termino imminuta (§. 33.).

Reſolutio II.

Terminorum differentia $a-y$ multiplicetur per denominatorem m, & factum $am-ym$ per eundem unitate mulctatum dividatur. *Quoto* hujuſce diviſionis $\frac{am-ym}{m-1}$ adjiciatur minimus terminus y. Aggregatum hujuſmodi erit ſumma totius progreſſionis quæſita.

De-

Demonſtratio.

Etenim *quotus* $\frac{am-ym}{m-1}$ eſt ſumma totius progreſſionis mulctata minimo ejuſdem termino y (§. 40.).

SYMPTOMATA
Progreſſionis Geometricæ infinitæ.

DEFINITIO VI.

51. *Particula infiniteſima, ſeu infinite parva, dicitur illa, quæ omni aſſignabili quantitate minor eſt, atque adeo illi plane incomparabilis.*

COROLLARIUM.

52. Hinc *particula infinite parva, ſi ad illam quantitatem, cui ſubtrahitur, referatur, pro nihilo haberi poteſt.* Cum enim ſit minor omni quantitate aſſignabili, ad nihilum adeo accedit, ut pro nihilo in calculo conſiderari queat.

Axioma fundamentale.

In progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente devenitur ad terminum adeo exiguum, ut penitus evaneſcat, & fiat zero æqualis.

53. Devenitur enim ad terminum infinite parvum.

COROLLARIUM I.

54. Igitur *exceſſus maximi termini in progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente, ſicuti etiam exceſſus ſummæ totius progreſſionis ſupra terminum ejuſdem minimum, diverſus non eſt ab ipſo termino maximo, neque a tota ejuſdem progreſſionis ſumma.* Ut ſi maximus terminus progreſſionis Geometricæ in infinitum deſcendentis fuerit a, minimus terminus y, & ſumma totius progreſſionis x, erit $a-y=a$, $x-y=x$. Cum enim ſit $y=o$ (§. 53.). erit $a-y=a-o$, $x-y=x-o$. Eſt autem $a-o=a$, & $x-o=x$. Ergo erit quoque $a-y=a$, $x-y=x$.

SCHOLION.

55. Quemadmodum in progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente devenitur ad terminum infinite parvum, ita contraria ratione in progreſſione Geometrica in infinitum aſcendente devenitur ad terminum infinite magnum. In hac enim progreſſione termini continuo augentur, ſicuti e contrario in illa continuo minores fiunt. Et hinc eſt, ſummam progreſſionis Geometricæ in infinitum aſcendentis nullatenus exhiberi poſſe.

THEOREMA X.

In progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente ut exceſſus maximi termini ſupra terminum proxime minorem, ad ipſum proxime minorem ita maximus ad omnes ſimul reliquos collective ſumtos.

56. Eſto progreſſio Geometrica in infinitum deſcendens $a . b . c . d \ldots\ldots y$. Dico, eſſe $a . b+c+d \ldots\ldots + y = a-b . b$.

Demonſtratio.

Cum enim jam habeatur $a-y . b+c+d \ldots\ldots + y = a-b . b$ (§. 30.), ſitque $a-y = a$ (§. 54.), erit quoque $a . b+c+d \ldots\ldots + y = a-b . b$ (*Lib. I.* §. 102.). Igitur in progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In progreſſione Geometrica in infinitum decreſcente ut ipſius denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita maximus progreſſionis terminus ad omnes ſimul reliquos.

57. Ut ſi quantitas m fuerit denominator progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis $a . b . c . d \ldots\ldots y$, erit $a . b+cd \ldots\ldots + y = m-1 . 1$. Conſtat enim, eſſe $a . b = m . 1$ (*Lib. I.* §. 9.), adeoque $a-b . b = m-1 . 1$ (*Lib. I.* §. 135.). Eſt autem $a . b+c+d \ldots\ldots + y = a-b . b$. Ergo erit etiam $a . b+c+d \ldots\ldots + y = m-1 . 1$ (*Lib. I.* §. 78.).

Co-

Corollarium II.

In progreſſione Geometrica in infinitum decreſcente in ratione dupla maximus terminus adæquat ſummam omnium reliquorum. Si decreſcat in ratione tripla, maximus terminus eſt duplus; ſi in ratione quadrupla, eſt triplus ſummæ reliquorum, atque ita deinceps.

58. Patet ex præcedenti. Videatur §. 32.

Theorema XI.

Si maximus terminus progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis per ipſius denominatorem unitate mulctatum dividatur, quotus erit ſumma totius progreſſionis maximo termino diminuta.

59. Eſto progreſſio Geometrica in infinitum decreſcens $a.b.c.d\ldots\ldots y$, cujus denominator ſit m. Dico, eſſe $\frac{a}{m-1} = b+c+d\ldots\ldots+y$.

Demonſtratio.

Enimvero cum ſit $\frac{a-y}{m-1} = b+c+d\ldots\ldots+y$ (§. 33.), & $a-y=a$ (§. 54.), erit quoque $\frac{a}{m-1} = b+c+d\ldots\ldots+y$. Itaque ſi maximus terminus &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Summa progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis maximo ipſius termino diminuta, ſi per denominatorem unitate mulctatum multiplicetur, maximus ejuſdem terminus efficitur.

60. Etenim iiſdem poſitis, cum ſit $\frac{a}{m-1} = b+c+d\ldots+y$, erit quoque $\overline{b+c+d\ldots\ldots+y} \times \overline{m-1} = a$ (*Lib.* 1. §. 11.).

Co-

Corollarium II.

Si maximus terminus progreſſionis Geometricæ in infinitum deſcendentis dividatur per ſummam totius progreſſionis maximo termino diminutam, quotus eſt denominator totius progreſſionis unitate mulctatus.

61. Quandoquidem cum habeatur $\overline{b+c+d\ldots\ldots\ldots+y} \times \overline{m-1} = a$, ſicuti diviſo primo membro hujus æquationis per $b+c+d\ldots\ldots+y$, quotus eſt $m-1$ (*Syn. Alg.* §. 67.), ita is ipſe erit *quotus* alterius membri per eamdem ſummam diviſi (*Lib. I.* §. 81.).

Theorema XII.

In progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente ut duorum maximorum terminorum differentia ad maximum terminum, ita maximus terminus ad omnium ſummam.

62. Eſto progreſſio Geometrica in infinitum deſcendens $a.b.c.d\ldots\ldots y$. Dico, eſſe $a.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots+y} = \overline{a-b}.\ a$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a-y = a$ (§. 54.), erit $\overline{a-y}.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots+y} = a.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots+y}$ (*Lib.* I. §. 102.). Eſt autem $\overline{a-y}.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y} = \overline{a-b}.\ a$ (§. 36.). Ergo erit quoque $a.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y} = \overline{a-b}.\ a$ (*Lib. I.* §. 77.). Itaque in progreſſione &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

In progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente maximus terminus eſt media proportionalis inter differentiam duorum maximorum terminorum, & totam progreſſionis ſummam.

63. Etenim cum ſit $a.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots+y} = \overline{a-b}.\ a$, erit quoque $\overline{a-b}.\ a = a.\ \overline{a+b+c+d\ldots\ldots\ldots+y}$.

Corollarium II.

Si quadratum maximi termini progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis dividatur per differentiam duorum terminorum maximorum, quotus erit ſumma totius progreſſionis.

64. Ut ſi ſumma progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis

a.

$a . b . c . d \ldots\ldots y$ fuerit x, erit $\frac{aa}{a-b} = x$. Habetur enim $a-b : a = a . x$ (§. 63.), adeoque $ax - bx = aa$ (*Lib. I.* §. 83.). Eſt autem $\frac{ax-bx}{a-b} = x$ (*Syn. Alg.* §. 72.). Ergo erit quoque $\frac{aa}{a-b} = x$ (*Lib. I.* §. 81.).

Corollarium III.

In progreſſione Geometrica in infinitum decreſcente ut denominator unitate mulctatus ad ſeipſum integrum, ita maximus progreſſionis terminus ad totam ejuſdem ſummam.

65. Videlicet, iiſdem poſitis, erit $a . a+b+c+d \ldots\ldots + y = m-1 . m$. Etenim cum ſit $a . b = m . 1$ (*Lib. I.* §. 9.), erit $a-b . a = m-1 . m$ (*Lib. I.* §. 141.). Oſtenſum eſt autem, eſſe $a . a+b+c+d \ldots\ldots + y = a-b . a$ (§. 63.). Ergo erit quoque $a . a+b+c+d \ldots\ldots + y = m-1 . m$ (*Lib. I.* §. 78.)

Corollarium IV.

Si ſumma progreſſionis Geometricæ in infinitum deſcendentis multiplicetur per illius denominatorem unitate mulctatum, & productum per ipſum denominatorem dividatur, quotus erit maximus ipſius terminus.

66. Etenim, ſtante analogia modo oſtenſa, erit $\overline{a+b+c+d \ldots\ldots + y} \times \overline{m-1} = a \times m$ (*Lib. I.* §. 82.). Eſt autem $\frac{a \times m}{m} = a$ (*Syn. Alg.* §. 72.)

Ergo erit quoque $\frac{\overline{a+b+c+d \ldots\ldots + y} \times \overline{m-1}}{m} = a$ (*Lib. I.* §. 81.).

Corollarium V.

Si in progreſſione Geometrica in infinitum deſcendente maximus terminus per progreſſionis denominatorem multiplicetur, & factum per eundem unitate mulctatum dividatur, quotus erit totius progreſſionis ſumma.

67. Videlicet, iiſdem poſitis, cum ſit $\overline{a+b+c+d \ldots + y} \times \overline{m-1} = a \times m$,

nec

Digitized by Google

nec non $\frac{\overline{a+b+c+d\ldots\ldots+y} \times \overline{m-1}}{m-1} = a+b+c+d\ldots\ldots+y$ (*Syn. Alg.* §. 67.),

erit quoque $\frac{a \times m}{m-1} = a+b+c+d\ldots\ldots+y$ (*Lib. I.* §. 81.).

PROBLEMA XIII.

Datis maximo termino progreſſionis Geometricæ in infinitum decreſcentis; ejuſque denominatore, ſummam invenire.

68. Maximus terminus progreſſionis Geometricæ in infinitum deſcendentis ſit a, ejuſque denominator m. Summam totius progreſſionis invenire oporteat.

Reſolutio I.

Terminus a dividatur per denominatorem m unitate mulĉtatum, & *quoto* $\frac{a}{m-1}$ maximus ipſe terminus a adjiciatur. Erit $\frac{a}{m-1}+a$ ſumma totius progreſſionis quæſita.

Demonſtratio.

Eſt enim $\frac{a}{m-1}$ ſumma totius progreſſionis maximo termino diminuta (§. 50.).

Reſolutio II.

Multiplicetur maximus terminus a per denominatorem m, & productum am dividatur per eundem denominatorem m unitate mulĉtatum. Erit $\frac{am}{m-1}$ ſumma totius progreſſionis.

De-